

Persistence Modules on Commutative Ladders: Auslander-Reiten Theory in Topological Data Analysis

平岡裕章 (九州大学IMI)*¹

Emerson G. Escolar (九州大学数理学府)*²

概要

籠の表現論を用いたパーシステントホモロジーの一般化について講演を行う。本講演の結果により、可換梯子籠上でのパーシステント加群に対しても、通常のパーシステントホモロジーと同様にパーシステント図などの位相的データ解析で重要な指標が与えられることになる。講演内容の詳細は論文 [3] を参照されたい。

1. 籠の表現論とパーシステントホモロジー

位相空間のフィルトレーション $\mathcal{X} : X_1 \subset \cdots \subset X_n$ に対して、パーシステントホモロジー $H_*(\mathcal{X})$ は1変数多項式環 $K[z]$ (K を体とする) 上の次数付き加群 $H_*(\mathcal{X}) = \bigoplus_{\ell=1}^n H_*(X_\ell)$ として定められる [4]。ここで多項式の作用は包含写像 $X_\ell \hookrightarrow X_{\ell+1}$ からの誘導準同型 $H_*(X_\ell) \rightarrow H_*(X_{\ell+1})$ で与えられる。このとき位相的データ解析で最も重要な指標になるパーシステント図は (例えば [5] 参照), 単項イデアル整域 $K[z]$ 上の有限生成加群として $H_*(\mathcal{X})$ を直既約な加群へ一意分解することから得られる。

一方、籠の表現論 (詳細は2節参照) の立場からは、パーシステントホモロジー $H_*(\mathcal{X})$ は \mathbb{A}_n 型籠

$$\overset{1}{\circ} \longleftrightarrow \overset{2}{\circ} \longleftrightarrow \overset{3}{\circ} \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow \overset{n}{\circ}$$

上の表現

$$H_*(\mathcal{X}) : H_*(X_1) \longleftrightarrow H_*(X_2) \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow H_*(X_n)$$

と見なせる。ここで \mathbb{A}_n 型籠内のそれぞれの辺 \longleftrightarrow は \longleftarrow もしくは \longrightarrow であるとし、それに応じて表現 $H_*(\mathcal{X})$ 内の対応する線型写像の向き \longleftrightarrow も定めるものとする。よって表現の立場では、次数付き加群としてのパーシステントホモロジーは、線型写像の向きが全て右向きの \mathbb{A}_n 型籠の表現に対応することになる。

Gabriel の定理 ([1] を参照) によると、 \mathbb{A}_n 型籠上の表現は区間表現 $I[b, d]$ ($1 \leq b \leq d \leq n$) による一意な分解

$$H_*(\mathcal{X}) \simeq \bigoplus_{i=1}^s I[b_i, d_i]$$

を持つ。ここで区間表現 $I[b, d]$ とは頂点 i ($b \leq i \leq d$) 上で1次元ベクトル空間 K , それ以外の頂点では0を割り当て、さらに線型写像 $K \rightarrow K$ を恒等写像で与えた表現である。これにより、一般の向きを持つ \mathbb{A}_n 型籠上の表現と見なした場合でも、この一意分

本研究は科研費 (課題番号:24684007, 26610042) の助成を受けたものである。

キーワード: パーシステント加群, Auslander-Reiten 理論, 位相的データ解析

*¹ 〒 819-0395 福岡市西区元岡 744 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

e-mail: hiraoka@imi.kyushu-u.ac.jp

*² e-mail: eescolar@math.kyushu-u.ac.jp

解からパーシステント図が多重集合

$$D(H_*(\mathcal{X})) = \{(b_i, d_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i = 1, \dots, s\} \quad (1)$$

として与えられる。

論文 [2] で議論されたこの \mathbb{A}_n 型籠上の表現としての拡張は、パーシステントホモロジーの位相的データ解析への適用範囲を広げることになった。例えば、タンパク質フォールディングなどの時系列として位相空間の列 X_1, \dots, X_n (フィルトレーションになるとは限らない) が与えられている場合にも、

$$X_1 \hookrightarrow X_1 \cup X_2 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X_{n-1} \cup X_n \hookrightarrow X_n$$

が誘導するパーシステントホモロジー

$$H_*(X_1) \longrightarrow H_*(X_1 \cup X_2) \longleftarrow H_*(X_2) \longrightarrow \dots \longleftarrow H_*(X_n) \quad (2)$$

を調べることで、時系列 X_1, \dots, X_n の中で存続する位相的特徴を抽出することが可能になる。

しかしながら、パーシステントホモロジー (2) では、各位相空間 X_i に対して頑健な位相的特徴が抽出できないことに注意しておく。この点を改善する最も簡単な方法は、各 i ごとに2段階のフィルトレーション $Y_i \subset X_i$ を導入した以下の図式

$$\begin{array}{ccccccc} H_*(X_1) & \longrightarrow & H_*(X_1 \cup X_2) & \longleftarrow & H_*(X_2) & \longrightarrow & \dots \longleftarrow H_*(X_n) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ H_*(Y_1) & \longrightarrow & H_*(Y_1 \cup Y_2) & \longleftarrow & H_*(Y_2) & \longrightarrow & \dots \longleftarrow H_*(Y_n) \end{array}$$

を調べることである。このような背景のもと、本講演では上段と下段で同じ横方向の向き付けを与えた可換梯子籠

$$\begin{array}{ccccccc} \overset{1}{\circ} & \longleftrightarrow & \overset{2}{\circ} & \longleftrightarrow & \overset{3}{\circ} & \longleftrightarrow & \dots \longleftrightarrow \overset{n}{\circ} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \underset{1'}{\circ} & \longleftrightarrow & \underset{2'}{\circ} & \longleftrightarrow & \underset{3'}{\circ} & \longleftrightarrow & \dots \longleftrightarrow \underset{n'}{\circ} \end{array} \quad (3)$$

上の表現としてパーシステント加群を定め、その性質を調べる。特に、通常の \mathbb{A}_n 型籠上のパーシステントホモロジーと同様に、パーシステント図などの位相的データ解析で重要な指標を可換梯子籠上にどのように一般化するかという点を中心に解説を行う。詳細は [3] を参照されたい。また本講演で用いる多元環の表現論については [1] を参考文献に挙げておく。

2. 多元環の表現

籠 $G = (G_0, G_1)$ とは、頂点集合が G_0 で有向辺の集合が G_1 で与えられる有向グラフのことである。本講演では有限 ($|G_0|, |G_1| < \infty$) かつサイクルを持たない籠のみを考える。籠 G の頂点 a から b への辺 $\alpha \in G_1$ を $\alpha : a \rightarrow b$ と表し、道 $\rho = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_s$ を α_i の終点と α_{i+1} の始点が等しい辺の合成として定める。

籠 G に対して道代数 KG は、 G 内の全ての道で張られるベクトル空間に、道の合成からなる積構造を入れたもので定義する。また、始点と終点が等しい異なる道 ρ, ρ' からな

る $\rho - \rho'$ の集まりは KG の両側イデアル I を生成し，その商が定める多元環 $A = KG/I$ は籠上に可換関係を与える．

籠 (3) の横方向の向き付けは上・下段で同じであるので，その向き付けに対応する $n - 1$ 個の記号 f, b (forward と backward) の列 τ_n を与えることで，可換梯子籠が決定する．そこで可換梯子籠 (3) が定める多元環を $CL(\tau_n)$ で表すことにする．

一般に多元環 $A = KG/I$ 上の表現 $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a \in G_0, \alpha \in G_1}$ とは，各頂点 $a \in G_0$ にベクトル空間 M_a を，各辺 $\alpha : a \rightarrow b$ に線型写像 $\varphi_\alpha : M_a \rightarrow M_b$ を割り当て，さらにイデアル I 上でこれらの線型写像の合成が零写像になるものとして定められる．従って，可換梯子籠 (3) 上のパーシステント加群は多元環 $CL(\tau_n)$ 上の表現として定義されることになる．なお，本講演では表現内のベクトル空間は全て有限次元のものを扱う．

このとき Krull-Schmidt の定理によると，任意の表現 M は直既約な表現の直和 $M \simeq W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ に同型を除いて一意に分解できる（ここで W_i は直既約表現を表す）．よって可換梯子籠上のパーシステント加群を研究するには，(1) 直既約表現の同型類がどのくらい存在するか，および，(2) その同型類はどのような種類の表現で与えられるか，をまず調べる必要がある．ここで一般に，多元環 A は直既約表現の異なる同型類の個数が有限個であるとき有限型であるといい，そうでないとき無限型とよぶ．

3. 可換梯子籠上でのパーシステント加群と Auslander-Reiten 籠

さて \mathbb{A}_n 型パーシステント加群の場合は，Gabriel の定理により有限型となり，またその直既約表現を区間表現と呼んでいた．またパーシステント図は直既約表現の重複度に対応する多重集合 (1) で定められていた．そこで可換梯子籠 $CL(\tau_n)$ 上で定められるパーシステント加群に対して， \mathbb{A}_n 型パーシステント加群と同様の理論を構築するには，以下の2つの疑問に答える必要がある．

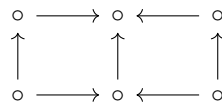
1. 可換梯子籠の表現型は有限型かどうか?
2. 有限型の場合，区間表現とパーシステント図に対する対応概念は何か?

これらの疑問に答える為に Auslander-Reiten 籠について復習する．一般に，多元環 A に対してその Auslander-Reiten 籠 $\Gamma(A) = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ は，頂点集合 Γ_0 を全ての直既約表現の同型類で与え，また同型類 $[M], [N] \in \Gamma_0$ に対して既約射 $M \rightarrow N$ が存在するとき Γ_1 内の辺 $[M] \rightarrow [N]$ を割当ててるものとして定められる．

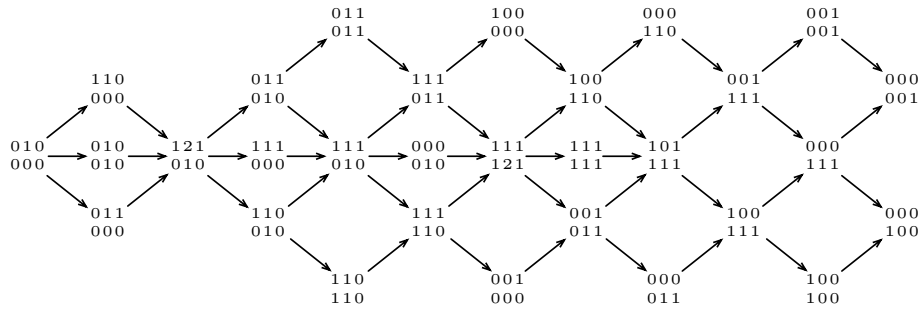
本講演では以下の結果 [3] を紹介する．

定理 3.1. 多元環 $CL(\tau_n)$ は $n \leq 4$ のとき向き付け τ_n によらず有限型となる．また $n > 4$ では一般には無限型となる．

ここで有限型の場合の Auslander-Reiten 籠は論文 [3] に全て列挙されている．例えば可換梯子籠 $CL(fb)$:



の Auslander-Reiten 籠は以下で与えられる:



ここで各頂点の同型類は次元ベクトルで表示している.

この定理により本節に挙げた疑問 1 は解決される. また疑問 2 の区間表現に対応する直既約表現のリストは Auslander-Reiten 籠の頂点集合 Γ_0 で与えられることになる. さらに, 疑問 2 のパーシステント図に関しては以下の定義により一般化されることになる.

定義 3.2. M を可換梯子籠 $CL(\tau_n)$ ($n \leq 4$) 上のパーシステント加群とし, その直既約分解が

$$M \simeq \bigoplus_{[I] \in \Gamma_0} I^{k_{[I]}}, \quad k_{[I]} \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

で与えられているとする. ここで Γ_0 は $CL(\tau_n)$ の Auslander-Reiten 籠の頂点集合を表すものとする. このとき M のパーシステント図 D_M は Auslander-Reiten 籠の頂点集合 Γ_0 上の関数

$$D_M : \Gamma_0 \ni [I] \mapsto k_{[I]} \in \mathbb{N}_0$$

として定められる.

これにより可換梯子籠 $CL(\tau_n)$ 上で, 通常のパーシステントホモロジーと同じ枠組みを構築することが可能になる. また, 定義 3.2 によるパーシステント図を具体的にもとめるアルゴリズムや, 位相的データ解析における各直既約表現の意味等の詳細は [3] に与えられているので参照されたい.

参考文献

- [1] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 1: Techniques of Representation Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [2] G. Carlsson and V. de Silva. Zigzag Persistence. *Found. Comput. Math.* 10 (2010), 367–405.
- [3] E. Escolar and Y. Hiraoka. Persistence Modules on Commutative Ladders of Finite Type. arXiv:1404.7588.
- [4] A. Zomorodian and G. Carlsson. Computing Persistent Homology. *Discrete Comput. Geom.* 33 (2005), 249–274.
- [5] 平岡裕章. タンパク質構造とトポロジー: パーシステントホモロジー群入門. 共立出版 (2013).