ホモロジー的ミラー対称性に関連するDG圏の非可換変形について

梶浦 宏成　（千葉大学大学院理学研究科）

概 要

ホモロジー的ミラー対称性予想とは, ミラー対称性のある圏論的定式化である．シンプレクティック多様体 X に対しては, X のラグランジュ部分多様体達を対象とする A_∞ 圏として深谷圏 $Fuk(X)$ を考えることができ, 複素多様体（あるいは代数多様体）$\check{X}$ に対しては, $\check{X}$ 上の連接層のアーベル圏の（有界）導来圏 $D^b(coh(\check{X}))$ を考えることができる．この２つの圏を比べるために, Kontsevich は A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ から三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ を構成する方法を導入した．導来圏はすでに三角圏の構造を持つので, これによって $Tr(Fuk(X))$ と $D^b(coh(\check{X}))$ の三角圏同値性を議論することができる．「X と $\check{X}$ がミラー対称であるとき, 三角圏同値

$$Tr(Fuk(X)) \simeq D^b(coh(\check{X}))$$

が成り立つ」というのが Kontsevich によって提案されたホモロジー的ミラー対称性予想である．この予想に関しては, これが成り立つ根本的な理由が完全に理解されているわけではないが, 予想自体が正しい方向性にあることは間違いない（と個人的にも思っているが, これについて研究している他の研究者もそう信じていると思われる）．実際, 様々なミラー対称なシンプレクティック多様体と複素多様体の組の例において肯定的な結果が得られている．

ホモロジー的ミラー対称性予想にはさらに続きがあり, 以前から議論されていたミラー対称性（の一部）がこれらの圏 $Tr(Fuk(X))$, $D^b(coh(\check{X}))$ の変形を考えることによって得られることが期待されている．しかしながらこの圏の変形について現状ではあまり研究が進んでいない．実際, このような目的のために圏の変形をどのように定式化するか, その時点から現状ではまだ明確になっていないと思われる．

この講演では, この圏の変形の定式化に向けて, $D^b(coh(\check{X}))$ に関係する DG 圏（D=Differential=微分, G=Graded=次数付き）のある変形を構成する．DG 圏は A_∞ 圏の特別なものであるので DG 圏 $\mathcal{C}$ に対して三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ を考えることができる．$\check{X}$ 上の正則ベクトルの成す DG 圏, あるいはその適当な充満部分 DG 圏を $\mathcal{C}$ とし, $Tr(\mathcal{C})$ が $D^b(coh(\check{X}))$ と三角圏同値となるような状況（これは大して厳しい条件ではなく, $\check{X}$ として’ある程度よい’ ものを考えれば自動的になりたっている）において, この DG 圏 $\mathcal{C}$ の以下の意味での非可換変形を考える．

まず複素多様体 $\check{X}$ を単に多様体とみなし, $\check{X}$ 上のポアソン構造 θ をひとつ与えると, θ に付随する変形量子化が得られる (Kontsevich)．つまり, C^∞ 関数の（可換）結合積の, 非可換結合積としての変形 $*_\theta$ が得られる．DG 圏 $\mathcal{C}$ の射の空間は,（正則）ベクトル束の間の束写像を微分形式に格上げしたようなものであるので, 射の合成は束写像の合成の格上げであり, 束写像の合成は局所的には C^∞ 関数を成分とする行列の積である．この意味で, 射の合成は C^∞ 関数の積の格上げであり, これを $*_\theta$ で変形する．これによって $\mathcal{C}$ は再び自然に圏を成すが, 微分の構造が少しくずれ, CDG 圏 (C= Curved) と呼ばれるものになる．とにかく $\mathcal{C}$ が一般の A_∞ 圏ではなく DG 圏であり, 高次の積を持たないので通常の積の部分を非可換変形することによって自然に $\mathcal{C}$ の非可換変形が得られるというわけなのだが, それは CDG 圏としての変形となるので従来のホモロジー的ミラー対称性の枠組みにのせるためにはまたひと手間かかることとなる．このような $\mathcal{C}$ の非可換変形の例について, これをどのような枠組みで考えるのがよいか? ということを主に [“On some deformations of Fukaya categories,” Symplectic, Poisson, and Noncommutative Geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 62, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014.] に沿って議論したい．この論文では, $\mathcal{C}$ の変形から, ホモロジー的ミラー対称性が成り立つように深谷圏 $Fuk(X)$ の変形を構成しているが本講演では $\check{X}$ 側の DG 圏の変形を中心にお話ししたい．