p-正則ホップ空間上のベキ写像の高位ホモトピー結合性について

河本 裕介　(防衛大学校)*

本講演では, すべての空間は弧状連結, 基点を持ち CW-複体のホモトピー型を持つとする.

(X, μ) をホモトピー結合的 H-空間 ($\mu\colon X^2 \to X$ は X の積を表す) とする. 上の仮定から (X, μ) は group-like 空間である. このとき X 上のベキ写像 $\{\Phi_\lambda^X\colon X \to X\}_{\lambda\in\mathbb{Z}}$ を次で定める: $\lambda \geq 0$ のとき, 帰納的に $\Phi_0^X(x) = x_0$, $\Phi_\lambda^X(x) = \mu(\Phi_{\lambda-1}^X(x), x)$ $(\lambda > 0)$. ここで $x_0 \in X$ は X の基点を表す; $\lambda < 0$ の場合 X のホモトピー逆元 $\iota\colon X \to X$ を用いて $\Phi_\lambda^X(x) = \iota(\Phi_{-\lambda}^X(x))$.

定義から, 次のことが分かる:

- (X, μ) はホモトピー可換 $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $\{\Phi_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{Z}}$ は H-写像.
- X は 2 重ループ空間 $\Longrightarrow$ $\{\Phi_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{Z}}$ はループ写像.

p を奇素数, $t \geq 1$ とするとき S^{2t-1} の p-局所化 $S^{2t-1}_{(p)}$ はループ空間 $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $t|(p-1)$. ループ空間 $S^{2t-1}_{(p)}$ を W_t で表す.

Arkowitz-Ewing-Schiffman [1] により, 次の結果が示されている:

定理 1 ([1])**.** p を奇素数とする. W_{p-1} 上のベキ写像 $\Phi_\lambda^{W_{p-1}}$ は H-写像 $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $\lambda(\lambda-1) \equiv 0 \bmod p$.

$t \neq p-1$ の場合 W_t の積はホモトピー可換であることから $\{\Phi_\lambda^{W_t}\}_{\lambda\in\mathbb{Z}}$ は H-写像である.

他方で W_t 上のベキ写像 $\Phi_\lambda^{W_t}$ がループ写像になるための条件は Lin [5] により研究されている.

定理 2 ([5])**.** p を奇素数, $t \geq 1$, $t|(p-1)$ とする. $\Phi_\lambda^{W_t}$ はループ写像 $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ ある p-進整数 $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\wedge$ に対し $\lambda = \alpha^t$.

注意 3. $\lambda \not\equiv 0 \bmod p$ のとき, 定理 2 は Rector [7] と Arkowitz-Ewing-Schiffman [1] により以前に示されている.

整数論の結果を用いることにより, 定理 2 は次の系を導く:

系 4. p, t は定理 *2* と同じとし $m = (p-1)/t$ とおく. $\lambda \neq 0$ とし $\lambda = p^a b$ $(a \geq 0$, $b \not\equiv 0 \bmod p)$ と表す. $\Phi_\lambda^{W_t}$ はループ写像 $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $t|a$, $b^m \equiv 1 \bmod p$.

本講演では X を A_n-空間 $(n \geq 3)$ とするとき, ベキ写像 $\{\Phi_\lambda^X\}_{\lambda\in\mathbb{Z}}$ が A_n-写像になるための条件を調べる. ここで A_n-空間とその間の A_n-写像は, それぞれ Stasheff [8] と岩瀬-三村 [4] により, 結合多面体 $\{K_i\}_{i\geq 1}$ と乗法多面体 $\{J_i\}_{i\geq 1}$ を構成することで定義されている. X 上のベキ写像の高位ホモトピー結合性は (X, μ) の高位ホモトピー可換性の欠如の度合を測るための基準と考えられる.

---

* 〒 239-8686 神奈川県横須賀市走水 1-10-20 防衛大学校総合教育学群数学教育室
e-mail: `yusuke@nda.ac.jp`

まず, 定理 1 は次のように一般化される:

定理 A. p を奇素数, $t \geq 1$, $t|(p-1)$ とし $m = (p-1)/t$ とおく. このとき $\{\Phi_\lambda^{W_t}\}_{\lambda\in\mathbb{Z}}$ は次を満たす:

(1) $\Phi_\lambda^{W_t}$ は A_m-写像 (${}^\forall\lambda \in \mathbb{Z}$).

(2) $\Phi_\lambda^{W_t}$ は A_{m+1}-写像 $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $\lambda(\lambda^m - 1) \equiv 0 \bmod p$.

注意 5. $t = (p-1)/2$ のとき, 定理 A (2) は McGibbon [6] により以前に示されている.

$\lambda \not\equiv 0 \bmod p$ のとき, 定理 A (2), 系 4 より $\Phi_\lambda^{W_t}$ は A_{m+1}-写像 $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $\Phi_\lambda^{W_t}$ はループ写像.

$\lambda \equiv 0 \bmod p$ の場合, 次が成り立つ:

定理 B. p, t, m は定理 A と同じとし $\lambda \equiv 0 \bmod p$, $2 \leq j \leq t$ とする. このとき $\{\Phi_\lambda^{W_t}\}_{\lambda\in\mathbb{Z}}$ は次を満たす:

(1) $\Phi_\lambda^{W_t}$ は $A_{(j-1)m+1}$-写像 $\Longrightarrow$ $\Phi_\lambda^{W_t}$ は A_{jm}-写像.

(2) $\Phi_\lambda^{W_t}$ は A_{jm+1}-写像 $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $\lambda \equiv 0 \bmod p^j$.

定理 A (2), B (2), 系 4 より, 次の系が得られる:

系 6. p, t, m は定理 A と同じとする. $\Phi_\lambda^{W_t}$ は A_p-写像 $\overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $\lambda \equiv 0 \bmod p^t$ または $\lambda^m \equiv 1 \bmod p$.

一般の A_p-空間に対しては, 次が成り立つ:

定理 C. p を奇素数, X は単連結 $\mathbb{F}_p$-有限 A_p-空間, λ は 1 の 原始 $(p-1)$-乗根 mod p とする. *Steenrod* 作用素 $\{\mathscr{P}^j\}_{j\geq 1}$ は $QH^*(X;\mathbb{F}_p)$ に自明に作用し X 上のベキ写像 Φ_λ^X は A_n-写像 $(n > (p-1)/2) \Longrightarrow \widetilde{H}^*(X;\mathbb{F}_p) = 0$.

注意 7. (1) 定理 C における λ の条件を除くことはできない. 実際:

(i) $\lambda \equiv 0 \bmod p$ のとき, 定理 A (2) より W_2 上のベキ写像 $\Phi_\lambda^{W_2}$ は $A_{(p+1)/2}$-写像.

(ii) $\lambda^k \equiv 1 \bmod p$ $(1 \leq k < p-1,\ k|(p-1))$ と仮定する. $t = (p-1)/k > 1$ とおくと, 系 4 より W_t 上のベキ写像 $\Phi_\lambda^{W_t}$ はループ写像.

(2) 定理 A (1) より $\{\Phi_\lambda^{W_2}\}_{\lambda\in\mathbb{Z}}$ は $A_{(p-1)/2}$-写像であるため, 定理 C において Φ_λ^X は A_n-写像 $(n > (p-1)/2)$ という条件を弱めることはできない.

H-空間 X は p-正則 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$X_{(p)} \simeq S_{(p)}^{2t_1-1} \times \cdots \times S_{(p)}^{2t_\ell-1} \quad (1 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_\ell) \tag{$*$}$$

Hubbuck-三村 [2], 岩瀬 [3] より p を奇素数 X は p-正則 A_p-空間 $\Longrightarrow$ $(*)$ において $t_\ell \leq p$.

定理 D. p, λ は定理 C と同じとし X は単連結 p-正則 A_p-空間で $(*)$ を満たすとする. Φ_λ^X が A_n-写像 $(n > [p/t_\ell]) \Longrightarrow \widetilde{H}^*(X;\mathbb{F}_p) = 0$.

注意 8. 定理 A (1) より $\{\Phi_\lambda^{W_t}\}_{\lambda\in\mathbb{Z}}$ は A_m-写像であり $[p/t] = m$ であるため, 定理 D において Φ_λ^X は A_n-写像 $(n > [p/t_\ell])$ であるという条件を弱めることはできない.

参考文献

[1] M. Arkowitz, J. Ewing and S. Schiffman, *H-structures on localized and completed spheres,* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 26 (1975), no. 1, 295–307.

[2] J. R. Hubbuck and M. Mimura, *Certain p-regular H-spaces,* Arch. Math. (Basel) 49 (1987), no. 1, 79–82.

[3] N. Iwase, *H-spaces with generating subspaces,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 111 (1989), no. 3–4, 199–211.

[4] N. Iwase and M. Mimura, *Higher homotopy associativity,* Algebraic topology (Arcata, CA, 1986), 193–220, Lecture Notes in Math., 1370, Springer, Berlin, 1989.

[5] X. Lin, *Self-maps of p-local infinite projective spaces,* Sci. China Math. 55 (2012), no. 4, 739–744.

[6] C. A. McGibbon, *Multiplicative properties of power maps* II*,* Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), no. 2, 479–508.

[7] D. L. Rector, *Loop structures on the homotopy type of S^3,* Symposium on Algebraic Topology (Battelle Seattle Res. Center, Seattle, Wash., 1971), 99–105, Lecture Notes in Math., 249, Springer, Berlin, 1971.

[8] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces* I, II*,* Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275–292; ibid. 108 (1963), 293–312.