非可換ケーラー多様体の試み

土基 善文

非可換幾何学は、量子力学の香りをつけた幾何学である。本講演ではまずその意義や意味、考え方について改めて考えを述べたい。特に強調したいのは、次の点である。

(1) 不確定性。全ての量を同時に観測可能とは限らない。これは複数の行列の同時固有値を見つけるのが一般には不可能なことと関連している。
(2) 不確定性の伝染。「非可換多様体」X を隔離された対象としてわれわれはヌクヌクと可換の世界で X 以外の全ての量を観測するなどということは無理だということである。

特に後者については、我々が構築すべき理論が全て量子的な考え方の洗礼を受けねばならないことを意味しており、場の量子論、重力の量子論などの考察の必要性の根拠となると思われる。

次に具体的な取り扱いについて述べる。全体の「容れ物」としてアーベル圏を考える。発表者の今回の興味は非可換代数幾何学的な取り扱いにあるので、局所的に非可換環の Spec であるようなモノを考えたい。つまり、

$$(\text{非可換代数多様体}) = (\text{局所的に非可換環の Spec であるようなアーベル圏})$$

複数の非可換環の Spec がどのように貼り合うかについて、圏論一筋という考え方もあるのだろう。しかし、可換の時のマネをしたとして、それで本当に良い物ができていると確信できるだろうか。

ここでは少し異なる手法について述べたい。図式的に書くと、次のような具合である。

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbb{Z}\text{ での話}) \arrow[dl, bend right, "\text{mod p}"'] \arrow[d, "\text{係数拡大}"] \\
(\text{多くの }\mathbb{F}_p\text{ での話}) \arrow[r, shift right, "\text{ultrafilter}"'] & (\mathbb{C}_{\mathcal{U}}\text{ での話}) \arrow[l, shift right, "\text{p 成分}"']
\end{tikzcd}$$

これについて以下詳しく述べよう。$\mathbb{Z}$ 上有限生成な「非可換多様体」X を考える。これを直接感覚的に捉えるのは難しいので、まず正標数の世界に落とし、$X \mod p$ のようなものを考える。正標数の世界では、関係する環たちはしばしば大きな中心をもち、したがってそれら中心たちの Spec は通常の代数幾何学で取り扱うことができる。こう

Date: 2014 年 9 月 19 日.

して通常の (但し $\mathbb{F}_p$ 上の) 代数多様体 M_p が各素数 p に対して得られる。正標数の世界はやはり見えにくい、という意見もありうるわけだが、これを ultra filter $\mathcal{U}$ を用いて切り抜けることができる。より正確には $\mathcal{U}$ は、素数全体の集合 $\mathrm{Spm}\,\mathbb{Z}$ の ultra filter である。これは $\mathrm{Spm}\,\mathbb{Z}$ に離散位相を入れて最大コンパクト化したときの境界の点と同一視できる。$\mathcal{U}$ により p での話の「極限」として再び標数 0 の多様体 $M_{\mathcal{U}} = \lim_{p\to\mathcal{U}} M_p$ が得られ、結果的に標数 0 の通常の多様体の議論が適用できるのである。講演者は M のことを X の「shadow」と呼び、このプロセスを「反量子化 (anti-quantization)」と呼んでいる。

さらに発展として、ケーラー多様体の非可換版を考えたい。これは基本的には複素射影多様体のケーラー構造の入れ方のマネである。基本的な考え方はシンプレクティック商 (Marsden-Weinstein quotient) やその非可換対応物で、考え方の原始的な部分は

`http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/bourdoki/erq3/index.html`

にすでにある。これは講演者が 10 年以上前に書いたもので、そのときにはモノはあったがそれをどのように料理すればよいかがわからなかった。現在の我々の手法ではそれぞれのステップで shadow を調べることにより、ある程度道がそれてないか調べられるのが強みである。これによって解析が進むことを期待している。

なお、本講演の内容と発展、(時には懺悔) については

`http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/`

から辿れるようにする予定である。