巡回被覆のホモロジーとペアリング

野坂武史　九州大学数理学研究院

2015 年 8 月 18–20 日

Keywords　Infinite cyclic coverings, Cup product, Blanchfield pairing, group homology

この 2 講演では, コンパクト多様体の巡回被覆空間をテーマに解説したい． 特にそのホモロジーに入る双対性や Blachfield ペアリングについて紹介する.

初回の講演では, 巡回被覆空間に関する双対定理を, ふた方向から以下の様に紹介する．

ひとつは巡回被覆空間の常コホモロジーについてである．その有理係数コホモロジー上のカップ積には, (次数-1 の) ミルナー双対定理 [M] という性質が古典的に知られている． この双対性は, よいフィルターと Gysin 準同型によって巧妙に構成される （講演で詳しく触れる）.

もう一方は, 底空間の局所系係数 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ による双対定理である. ここで t は被覆変換とみなす． すると, 環 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ の Tor^i $(i \in \{0, 1, 2\})$ に応じ, 局所系係数ホモロジーに 3 種の双対定理 [K] が与えられている （オリジナルは Tor^1 版で, Blanchfield ペアリング [B] という.） 構成の鍵は Bockstein 作用素ないし普遍係数スペクトル系列である．

両構成に類似感をうけるが, しかし隠微なズレが現れ, 等価性を論じた文献は少ない．その上, 代数トポロジー（特に $\mathbb{L}$-理論）や代数手術理論による端正な理論整備も多くない。そこで当日は問題意識も述べる．また結び目理論で知られる双対定理の応用例と難点も紹介したい．

二つ目の講演では, 二つの双対定理の等価性を論じる．試みとして [Ne] の最終章もあったが, 局所系の交叉形式とカップ積の差はなかなか埋まらなかった様である.

しかしながら, 筆者 [No] は 3 次元結び目補空間に関し, 上 2 つの双対定理を結ぶ等式を明示した．さらにこの等式を通じ, Blanchfield ペアリングの図式的な計算法も与えた． たとえば、トーラス結び目に関し綺麗な値を初めて与えた．

本講演では結果を紹介した後, 証明の要点も述べたい．証明の際, Bockstein 作用素の Leibniz 則と結び目の $K(\pi, 1)$-性とが如実に使われる. であるため, この等価性の一般化や高次化に向け, （ホモトピー群の様な）障碍がどう現れるのかも, 議論したい．

References

[B] R. Blanchfield, *Intersection theory of manifolds with operators wit applications to knot theory*, Ann. of Math. **65**: (1957) 340–356.

[K] A. Kawauchi, *Three dualities on the integral homology of infinite cyclic coverings of manifolds*, Osaka J. Math. **23** (1986), 633–651.

[Ne] W. Neumann, *Signature related invariants of manifolds-I. Monodromy and γ-invariants*, Topology **18** (1979), 147–172.

[No] T. Nosaka, *Relaive cup products of knots I, II*, preprint.

[M] J. W. Milnor, *Infinite cyclic coverings*, Conference on the Topology of Manifolds (Michigan State Univ., E. Lansing, Mich., 1967), Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Mass., (1968) 115–133.