空間の代数的・幾何的モデルとその周辺 2013

GOTTLIEB 群の部分群における実現問題

高知大学　教育学部　　山口俊博

概要. 空間 X の Gottlieb 群のどのような部分群が、X をファイバーとするファイブレーションによって「実現」されるか？という「問題」に対し、「(Gottlieb 的）深さ」という有理ホモトピー不変量 (ものさし）を用いて観察する。とくに、Halperin 予想、余裕があれば（底空間が BS^1 の場合に）有理トーラス階数と、どのように関係しているかを見たい。本講演は [Y] の内容であり、Sullivan の有理モデルを用いる。

1. 動機と定義

登場する全てのファイブレーション $\xi : X \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} Y$ は、ことわらない限り（$aut(\ )$ と有理化の可換性における要請から）単連結 CW 複体で E は有限とする。$aut(X)$ を X の自己ホモトピー同値写像のなす空間、$aut(p)$ を E の p と可換な（ファイバーを保つ）自己ホモトピー同値写像のなす空間とする。つまり $aut(p) = \{f \in aut(E) | p \circ f = p\}$。

Gottlieb[G] の問題 (1968)：X のどのようなホモトピー同値写像が、ξ における E の（ファイバーを保つ）ホモトピー同値写像へ拡張されるか？

つまり $R : aut(p) \to aut(X)$ を制限写像としたとき、$\pi_0(R) : \pi_0(aut(p)) \to \pi_0(aut(X))$ の像を調べよということである。[G] によって、ユニバーサルファイブレーション $X \to E_\infty \to B_\infty$ の場合に、これは $G_1(B_\infty)$ と同形であることが示されている（E_∞ は無限次元)。ちなみに講演者らは、底空間 Y が $K(\mathbb{Z}, 2)$ の場合に、Puppe らによる deformation による分類に対抗して、$\pi_0(R)$ の像達を観察している [Y5],[HYY]。本講演では $\pi_0(\ )$ は敬遠して、id_E の連結成分 (どの成分も同じ) において高次元化したものを X のホモトピー群の中で考える。すなわち、$n > 0$ のとき

問 A：$\pi_n(R) : \pi_n(aut_1(p)) \to \pi_n(aut_1(X))$ の像を $\pi_n(X)$ の言葉で評価せよ。

ここで X の n 次 Gottlieb 群 $G_n(X)$ の定義を思い出そう。これは、$*$ を X の基点としたとき、$ev_X : aut_1 X \to X$ を $ev_X(g) = g(*)$ において、$\pi_n(X) \supset G_n(X) := \mathrm{Im}\ \pi_n(ev_X)$ で与えられる。これは随伴をとると、$[a] \in G_n(X)$ とは、

$$\begin{tikzcd} X \times S^n \arrow[r, dotted, "F"] & X \\ X \vee S^n \arrow[u, "inc."] \arrow[r, "id_X \vee a"] & X \vee X \arrow[u, "\nabla"'] \end{tikzcd}$$

がホモトピー可換となる写像 F の存在と同じこと。$G_n(\ )$ は関手的でないことと、X が球面でもほとんどわかっていない (Golasinski-Mukai) ことを注意しておく。有理ホモトピー論では

予想（Félix-Halperin)：n 次元 CW 複体 X に対し、$G_{\geq 2n}(X)_{\mathbb{Q}} = 0$。

が有名である [FH]。ここで $G_{\mathbb{Q}} := G \otimes \mathbb{Q}$。またここ１０年の Lupton と Smith らの一連の論文をはじめとして、[HKO],[Y2],[Y3] も参照していただきたい。現在も多くのホモトピー論研究者が次々と $G_n(X)$（とその周辺の群）についての結果を出しつつある。思いつく人を指折り数えようにも、Arkowitz, Golasinski, Kim, Lee, 丸山, 三村, 向井, 小田, Oprea, Pak, Woo, Wu, Yoon, (敬略) $\cdots$ とすぐ両手がふさがってしまう。元来 $G_n(X)$ はユニバーサルなもの ($G_n(X) = \cup_\xi \mathrm{Im}\ \partial^\xi_{n+1}$) であり、（個々のファイブレーションに制限することにより）自然に次の群を含む。

定義：X の ξ に対する n 次**ファイバー制限 Gottlieb 群** (fibre-restricted Gottlieb group) を、

$$G^\xi_n(X) = \mathrm{Im}\ \pi_n(ev_X \circ R)$$

で与える。ここで $ev_X \circ R : aut_1(p) \to aut_1 X \to X$ とする。（有限ではないが）ξ がユニバーサルファイブレーションのとき $G^\xi_n(X) = G_n(X)$。

命題 1.1. *(1)* ξ が直積ファイブレーションなら、$G^\xi_n(X) = G_n(X)$

(2) ∂^ξ_{n+1} を、ξ のホモトピー完全列の接続写像 $\pi_{n+1}(Y) \to \pi_n(X)$ としたとき、$\mathrm{Im}\ \partial^\xi_{n+1} \subset G^\xi_n(X) \subset G_n(X)$

(3) $G^{\xi_1\times\xi_2}_n(X_1 \times X_2) = G^{\xi_1}_n(X_1) \oplus G^{\xi_2}_n(X_2)$

(4) n次評価部分群 $G_n(E, X; j)$ を、$ev : map(X, E; j) \to E$ に対する $Im(\pi_n(ev))$ としたとき

$$\begin{CD} G^\xi_n(X) @>{\subset}>> G_n(X) \\ @V{j_\sharp}VV @VV{j_\sharp}V \\ G_n(E) @>{\subset}>> G_n(E,X;j) \end{CD}$$

は可換。

本講演のタイトルをいいかえると次のようになる。

問 B： $G_n(X)$ のどんな部分群 G が、あるファイブレーション $\xi : X \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} Y$ によって $G = G^\xi_n(X)$ と実現される (されない) だろうか？

2. Sullivan の極小モデルの活用

以後、有理ホモトピー論における Sullivan のモデル [FHT] を用いる。ファイブレーション $\xi : X \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} Y$ のモデルを、

$$M(Y) = (\Lambda V, d_Y) \to (\Lambda V \otimes \Lambda W, D) \to (\Lambda W, \overline{D}) \cong M(X)$$

と与える。まん中の $(\Lambda V \otimes \Lambda W, D)$ は全空間 E のモデルであるが、極小とは限らない。さて、$[a] \in \pi_n(aut_1(p))$ とは、随伴をとると、

$$\begin{CD} E \times S^n @>{F}>> E \\ @V{p'}VV @VV{p}V \\ Y @= Y \end{CD} \qquad : \ p' \mid_{E\times *} = p,\ F \mid_{*\times S^n} \simeq a,\ F \mid_{E\times *} = id_E$$

がきっちり可換になるような F が存在するときであることを [FLS] はモデルで考察した。本講演は次の結果が大切である。

定理 2.1 (FLS)**.** $\pi_n(aut_1(p))_{\mathbb{Q}} \cong [E \times S^n, E_{\mathbb{Q}}]_{o/u} \cong H_n(Der_{\Lambda V}(\Lambda V \otimes \Lambda W), \delta_D)$

ここで中辺は上図（を有理化したもの）の可換性を保ったままのホモトピー類の集合、右辺は ΛV を零に写す derivation のなす n 次ホモロジー群である（ともに詳細は略す)。さて、$[a] \in G_n^{\xi}(X)$ とは、随伴をとると、ある $F\mid_{*\times S^n} \simeq a$、$F\mid_{X\times *} = id_X$ なる $F : X \times S^n \to X$ が、

$$\begin{tikzcd} X \times S^n \arrow[r, "F"] \arrow[d, "j\times 1_{S^n}"'] & X \arrow[d, "j"] \\ E \times S^n \arrow[r, dotted, "\tilde{F}"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, equal, "1_Y"] & Y \end{tikzcd} \qquad : \ \tilde{F}\mid_{E\times *} = id_E$$

がきっちり可換になるような $\tilde{F}$ に拡張されるときであるから、次の定理を得る。

定理 2.2. 写像 $\pi_n(R)_{\mathbb{Q}} : \pi_n(aut_1(p))_{\mathbb{Q}} \to \pi_n(aut_1(X))_{\mathbb{Q}}$ は、*derivations* の制限写像

$$H_n(res) : \ H_n(Der_{\Lambda V}(\Lambda V \otimes \Lambda W), \delta_D) \to H_n(Der(\Lambda W), \delta_X)$$

によって与えられる。よって、 $\epsilon : \Lambda W \to \mathbb{Q}$ に対し、

$$G_n^{\xi}(X)_{\mathbb{Q}} = Im\big(H_n(\epsilon_*) \circ H_n(res) : H_n(Der_{\Lambda V}(\Lambda V \otimes \Lambda W)) \to Hom(W^n, \mathbb{Q})\big)$$

例 2.3. 主 K-ファイブレーション ξ において、$G_*^{\xi}(K)_{\mathbb{Q}} = G_*(K)_{\mathbb{Q}}$。

例 2.4. $X = S^3 \times S^4$ において $G_3(X)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ であるが、$G_3^{\xi}(X)_{\mathbb{Q}} = 0$ となる、S^5 上のある枠束から得られるファイブレーション $\xi : X \to E \to S^5$ がある *(Thomas)*。

定理 2.5. トーラス T が X に自由に作用しているとき、*Borel* ファイブレーション $\xi : X \to ET \times_T X \to BT$ に対し、$G_*^{\xi}(X)_{\mathbb{Q}} = G_*(X/T)_{\mathbb{Q}}$ となる。

例 2.6. $X = (S^4 \vee S^4) \times S^5$ のとき、$G_*(X)_{\mathbb{Q}} = G_5(X)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ である *(Smith)* が、*[HS]* の例 *6.5* の手法から、あるファイブレーション $\xi : X \to E \to S^2$ に対して、$G_*^{\xi}(X)_{\mathbb{Q}} = 0$ となることがわかる。

有理ホモトピー群も有理ホモロジー群も有限な空間は **elliptic** といわれる。

$G_*(X)$ の部分群 $\bigcap_{\xi} G_*^{\xi}(X)$ は興味ある群である。N を $\max\{i \mid \pi_i(X)_{\mathbb{Q}} \neq 0\}$ としたとき

補題 2.7. *elliptic* 空間 X では、任意の ξ に対し、$\pi_N(X)_{\mathbb{Q}} \subset G_*^{\xi}(X)_{\mathbb{Q}}$。

定理 2.8. *elliptic* 空間 X では、$\cap_{\xi} G_*^{\xi}(X)_{\mathbb{Q}} \neq \{0\}$ であり、この群はあるファイブレーション η によって $G_*^{\eta}(X)_{\mathbb{Q}}$ と実現される。

§1 の問 B は一般には難しい問題かもしれないが、有理ホモトピー論では、上の例で見れるように定理 2.2 が使えて、計算ができる。そのとき $G_*(X)_{\mathbb{Q}}$ は（次数付き）有限次元ベクトル空間にすぎないが、基底となる元にはそれぞれ個性があることが実感できる。次節の不変量はその多様性を測る一つの目安になろう。

3. 深さと Halperin 予想

定義： X の Y に対する「(Gottlieb 的) 深さ」を次のように与える。

$$\mathrm{depth}_Y(X) = \max\{n \mid G_*(X)_{\mathbb{Q}} \supset G_*^{\xi_0}(X)_{\mathbb{Q}} \supsetneq G_*^{\xi_1}(X)_{\mathbb{Q}} \supsetneq \cdots \supsetneq G_*^{\xi_n}(X)_{\mathbb{Q}}\}$$

ここで、ファイブレーション $\xi_i : X \to E_i \to Y$ において全空間 E_i は有限複体であって、例 2.6 で見たように $G_*^{\xi_n}(X)_{\mathbb{Q}}$ は零かもしれない。もしそのような ξ_i が 1 つも存在しないときは、$\mathrm{depth}_Y(X) = -1$ とする。例えば $X = S^{2n}$、$Y = K(\mathbb{Z}, 2)$ のときとか。単に「X の (Gottlieb 的) 深さ」を、

$$\mathrm{depth}(X) = \max\{\mathrm{depth}_Y(X) \mid Y\}$$

とする。当然、$0 \le \mathrm{depth}(X) \le \dim G_*(X)_{\mathbb{Q}}$ であり、$\mathrm{depth}(X \times Y) \ge \mathrm{depth}(X) + \mathrm{depth}(Y)$ となる。$\mathrm{depth}(S^n) = \mathrm{depth}(\mathbb{C}P^n) = 0$ などは明らか。一般に

問 C：いつ $\mathrm{depth}(X) = 0$ か？

$H^*(X;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x_1,..,x_n]/(f_1,..,f_n)$ なる elliptic 空間 X は **F_0-空間**といわれる。ここで各 f_i は $\mathbb{Q}[x_1,..,x_n]$ の多項式で、$f_1,..,f_n$ は正則列。次の 1977 年の予想はいろいろな場面でひょっこり顔を出し、有理ホモトピー論の手強さを感じさせる。

Halperin 予想：F_0-空間 X に対し、どのようなファイブレーション $X \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} Y$ も $\mathbb{Q}$-係数 Serre スペクトル系列は退化する。

これについては多くの結果がある。例えば $\mathrm{rank}G = \mathrm{rank}K$ なる等質空間 G/K においてこの予想は正しい（Shiga-Tezuka）とか。

定理 3.1. Halperin 予想が正しければ、かってな F_0-空間 X に対し $\mathrm{depth}(X) = 0$。*(*つまり、$G_*(X)$ の部分群 G に対し、もし $\dim G_{\mathbb{Q}} < \dim G_*(X)_{\mathbb{Q}}$ なら、$G = G_*^{\xi}(X)$ と実現されない*)*

系 3.2. $\mathrm{rank}G = \mathrm{rank}K$ なる等質空間 G/K において、$\mathrm{depth}(G/K) = 0$。

もちろん $\mathrm{rank}G > \mathrm{rank}K$ でも $\mathrm{depth}(G/K) = 0$ となりうる。例えば、$G = SU(6)$、$K = SU(3) \times SU(3)$ のとき、G/K は formal でなく $\mathrm{rank}G = 5 > 4 = \mathrm{rank}K$ だが、単純に次数の関係から $\mathrm{depth}(G/K) = 0$ となる。リー群 G では $\mathrm{depth}(G) \le \mathrm{rank}G - 1$ となる。ここで X が **formal** であるとは、ある写像 $M(X) \to (H^*(X;\mathbb{Q}), 0)$ がコホモロジーの同型を導くときをいう。例えば、K*ä*hler 多様体は formal である (Deligne-Griffiths-Morgan-Sullivan)。ところで、elliptic 空間 X において、$\chi_\pi(X) := \dim \pi_{even}(X)_{\mathbb{Q}} - \dim \pi_{odd}(X)_{\mathbb{Q}}$ は、**ホモトピーオイラー数**といわれる。$\dim H^*(X;\mathbb{Q}) < \infty$ のときは、X が F_0-空間であることと $\chi_\pi(X) = 0$ は同値。

系 3.3. Halperin 予想が正しければ、*formal* な *elliptic* 空間において、$\mathrm{depth}(X) \le \dim G_*(X)_{\mathbb{Q}} - \dim \pi_{even}(X)_{\mathbb{Q}}$。

予想：elliptic 空間 X において、$\mathrm{depth}(X) \le -\chi_\pi(X)$。

4. BS^1 上の深さとトーラス階数の深さ

有理トーラス階数 $r_0(X)$([H],[FOT]) という不変量を思い出そう。これは、X と同じ「有理」ホモトピー型をもつ空間 Y に、T^r がほとんど自由に（Y のすべての点における安定化群が有限になるように）作用できる最大の r のことである。

例と性質： (1) 定義より $r_0(X) + r_0(Y) \le r_0(X \times Y)$
(2) 全ての a_i が奇数のとき $r_0(S^{a_1} \times \cdots \times S^{a_r}) = r$
(3) 任意の $n > 0$ に対し $r_0(S^{2n}) = r_0(\mathbb{C}P^n) = 0$

(4) 等質空間 G/K に対し $r_0(G/K) = r_0(G) - r_0(K)$、一般に elliptic 空間において、$r_0(X) \leq -\chi_\pi(X)$（Allday-Halperin）
(5) 有理トーラス階数は cohomology だけからは決まらない (Kotani-Y)。
(6) X への「ほとんど自由な」T^r-作用に対して $ET^r \times_{T^r} X \simeq_{\mathbb{Q}} T^r \backslash X$。

Gottlieb 群と有理トーラス階数の関係については [JL] で（相性が悪い例が）触れられている。すくなくとも、「深さ」も「有理トーラス階数」も、LS カテゴリーによって上から抑えられていて、ともに下から抑えるものがよくわからない。本講演では次の Halperin の判定法を用いる。

Borel fibration $X \to ET^r \times_{T^r} X \to BT^r$ のモデルは、

$$(\mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_r], 0) \to (\mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_r] \otimes \wedge W, D) \to (\wedge W, d)$$

$|t_i| = 2$ で与えられ [FOT]、

定理 [H]： $r_0(X) \geq r$ の必要十分条件は $\dim H^*(\mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_r] \otimes \wedge V, D) < \infty$ (このとき、ある有限複体 $Y (\simeq_{\mathbb{Q}} X)$ に自由な T^r-作用が作れる) である。

系 4.1. *(1)* $r_0(X) = 0$ の必要十分条件は $\mathrm{depth}_{BS^1}(X) = -1$。
(2) $r_0(X) = k > 0$ の必要十分条件は $\mathrm{depth}_{BT^k}(X) \geq 0$ かつ $\mathrm{depth}_{BT^{k+1}}(X) = -1$

注 4.2. 自由な S^1 作用に対し、$\mathrm{depth}_{BS^1}(X) < \mathrm{depth}_{BS^1}(X/S^1)$ となりうる。

定理 4.3. $X \simeq_{\mathbb{Q}} S^{n_1} \times S^{n_2} \times \cdots \times S^{n_m}$ *(*$n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_m$ は全て奇数*)* のとき、$\mathrm{depth}_{BS^1}(X) = 0$ となる必要十分条件は $n_1 + n_2 > n_m$。このとき、X への任意の自由な T^r 作用に対し、$r_0(X/T^r) = r_0(X) - r$。

例 4.4. $SU(4) \simeq_0 S^3 \times S^5 \times S^7$ なので、$\mathrm{depth}_{BS^1}(SU(4)) = 0$ となり、$SU(4)$ への任意の自由な T^r 作用に対し、$r_0(SU(4)/T^r) = r_0(SU(4)) - r$。しかし、$SU(5) (\simeq_0 S^3 \times S^5 \times S^7 \times S^9)$ においては $\mathrm{depth}_{BS^1}(SU(5)) = 1$ であり、$r_0(SU(5)/S^1) = 1 = r_0(SU(5)) - 3$ なる S^1 作用が有理的に存在する。

例えば、$\mathrm{depth}_{BS^1}(X) = 0$ なら、任意の自由な S^1 作用に対し、$r_0(X/S^1) = r_0(X) - 1$ だろうか？このような問いに対し、もっと一般的に考察するために、[Y4] における X に関するトーラス階数達の第１象限における格子点集合 $\mathcal{T}_0(X)$ から次のトーラス作用の多様性を測る不変量を定義しておく：

定義 4.5. X のトーラス階数の深さ：

$$r_0\text{-depth}(X) := \max\big\{n \mid (0,1), (r_1,1), (r_2,1), \cdots, (r_n,1) \in \mathcal{T}_0(X)$$

$$\textit{with} \quad 0 = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n < r_0(X)\big\}.$$

ただし、$r_0(X) = 0$ のときは r_0-depth$(X) = -1$ とする。

ここで、座標 (s,t) の点が存在するのは、$r_0(ET^t \times_{T^t} X) = r_0(X) - s - t$ なる T^t-作用があるときとしている [Y4]。

予想：Lie 群 G に対し、r_0-depth$(G) = \mathrm{depth}_{BS^1}(G)$。

5. Y 上のポセット構造

底空間 Y を固定して考える。２つのファイブレーション $\xi_i : X \to E_i \to Y$ $(i=1,2)$ に対し、$G_*^{\xi_1}(X)_{\mathbb{Q}} \cap G_*^{\xi_2}(X)_{\mathbb{Q}} = G_*^{\xi_3}(X)_{\mathbb{Q}}$ なるファイブレーション $\xi_3 : X \to E_3 \to Y$ は存在するだろうか？答えは No である。ここでは大まかにでいいので、ファイブレーション達 $\{\xi_i\}$ の全体を見渡したい。

先の $\mathrm{depth}_Y(X)$ は、(固定した) $G_*(X)_{\mathbb{Q}}$ の中の有理ファイバー制限 Gottlieb 群達の自然な包含関係によって順序を決めたポセット

$$\mathcal{G}_Y(X) := (\{G_*^{\xi}(X)_{\mathbb{Q}}\}_{\xi_{\mathbb{Q}}}, \subset)$$

（ξ は全て Y 上のファイブレーション）の高さに他ならない。Y が有限のときは、ξ として常に X と Y による直積ファイブレーションが最大元として存在し、とくに $\mathcal{G}_Y(X)$ は空集合にはなりえない。とりあえず下にいくほど直積から遠いといえよう。いつ $\mathcal{G}_Y(X)$ は束になるのだろうか？

補題 5.1. *$X \simeq_{\mathbb{Q}} S^{n_1} \times S^{n_2} \times S^{n_3} \times S^{n_4}$ (n_i は全て奇数)、$H^*(Y;\mathbb{Q}) = H^{even}(Y;\mathbb{Q})$ のとき、$\mathcal{G}_Y(X)$ において*

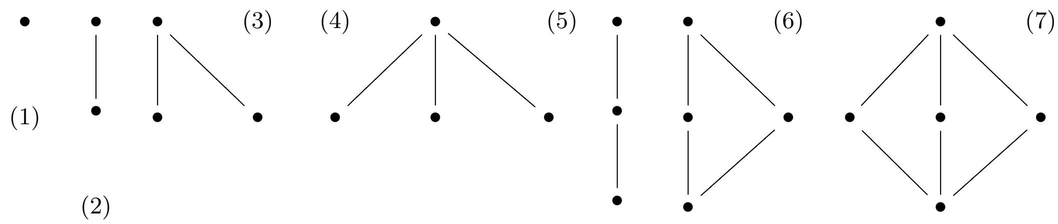
(i) １次元空間は高々１つしか実現できない。*(*補題 *2.7* より*)*

(ii) ２次元空間は高々３つしか実現できない。（*(i)* より）

(iii) ３次元空間は実現できない。*(*簡単な基底の変換より*)*

とくに、$\mathrm{depth}_Y(X) \le 2$ である。

定理 5.2. *$X \simeq_{\mathbb{Q}} S^{n_1} \times S^{n_2} \times S^{n_3} \times S^{n_4}$ (n_i は全て奇数)、$Y = BS^1$ のとき、$\mathcal{G}_Y(X)$ のハッセ図は (n_i 達によって決まるが)*



のいずれかであり、(5) を除く (1) $\sim$ (7) の６個は実現できる。

注 5.3. 上の命題の仮定のもとでは、(6) と (7) は実現できるのに (5) は実現できないということから、１次元空間が $G_*^{\xi}(X)_{\mathbb{Q}}$ で実現されれば、必ず（異なる）２つか３つの２次元空間が実現される。

この注と定理 2.5 より、

系 5.4. *階数４の連結 Lie 群 G に S^1 が自由に作用していて、$\dim G_*(G/S^1)_{\mathbb{Q}} = 1$ もしくは $r_0(G/S^1) = 0$ となったとする。このとき G と同じ有理ホモトピー型をもつ有限複体 $\{X_i\}$ ($i = 1,2$ か $i = 1,2,3$) が存在して次をみたす。*

(a) 各 X_i に、有理ホモトピー的に異なる自由な S^1-作用が存在する。つまり、$i \neq j$ のとき、有理化した *Borel* ファイブレーション間に

$$\begin{tikzcd}
X_{i\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & (ES^1 \times_{S^1} X_i)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d, dotted, "F"', "\simeq"] & BS^1_{\mathbb{Q}} \arrow[d, equal] \\
X_{j\mathbb{Q}} \arrow[r] & (ES^1 \times_{S^1} X_j)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & BS^1_{\mathbb{Q}}
\end{tikzcd}$$

をホモトピー可換にするような F が存在しない。

(b) 各 i に対し、$\dim G_*(X_i/S^1)_{\mathbb{Q}} = 2$。
(c) 各 i に対し、$r_0(X_i/S^1) = 1$。

例 5.5. いつ $\mathcal{G}_{BS^1}(X)$ は全順序集合になるだろうか？
例えば、$X = S^3 \times S^9 \times \mathbb{C}P^5 \times S^{17}$ のとき、$M(X) = (\Lambda(u, w_1, w_2, w_3, w_4), d)$、ただし $|u| = 2$, $|w_1| = 3$, $|w_2| = 9$, $|w_3| = 11$, $|w_4| = 17$, $dw_1 = dw_2 = dw_4 = 0$, $dw_3 = u^6$ となっている。$M(BS^1) = (\mathbb{Q}[t], 0)$ $(|t| = 2)$ としたとき ξ のモデルを $Dw_1 = Dw_2 = 0$, $\quad Dw_3 = u^6$, $Dw_4 = w_1w_2t^3 + t^9$ によって与えると $G^\xi(X)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}(w_2, w_4)$ をえる。また

$$Dw_1 = 0, \quad Dw_2 = u^4t, \quad Dw_3 = u^6, \quad Dw_4 = w_1w_3t^2 - w_1w_2u^2t + t^9$$

のとき $G^\xi(X)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}(w_4)$ をえる。3 次元空間や $\mathbb{Q}(w_1, w_4)$ と $\mathbb{Q}(w_2, w_4)$ は実現されない。このようにして $\mathcal{G}_{BS^1}(X)$ は

$$\mathbb{Q}(w_1, w_2, w_3, w_4) \supset \mathbb{Q}(w_3, w_4) \supset \mathbb{Q}(w_4)$$

のみとなり、ハッセ図は上の定理の中の (5) となる。ところでこの X は、 $X' = S^3 \times S^9 \times S^{11} \times S^{17}$ への（第 3 成分への）自由 S^1 作用による軌道空間であるが、$\mathcal{G}_{BS^1}(X')$ は上の定理の中の (3) となり、注 *4.2* の例を与える。

注： 連結 Lie 群のように X が奇数次元球面の直積の有理ホモトピー型を持つときは、$\mathcal{G}_{BS^1}(X)$ は高さが 2 以上の全順序集合にはどうもなりそうもない。このようなことは上の系で見たような、X への S^1 作用における何らかの制限を意味するだろう。

6. 参考文献

[FH] Y.Félix and S.Halperin, *Rational LS category and its applications,* Trans.A.M.S. **273** (1982) 1-38

[FHT] Y.Félix, S.Halperin and J.C.Thomas, *Rational homotopy theory*, Springer G.T.M. **205** [2001]

[FLS] Y.Félix, G.Lupton and S.B.Smith, *The rational homotopy type of the space of self-equivalences of a fibration*, Homology, Homotopy and Applications, vol. 12(2), (2010) 371-400

[G] H.Gottlieb, *On fibre spaces and the evaluation map*, Ann. of Math. **87** (1968) 42-55

[H] S.Halperin, *Rational homotopy and torus actions*, London Math. Soc. Lecture Note Series **93**, Cambridge Univ. Press (1985) 293-306

[HS] S.Halperin and J.Stasheff, *Obstructions to homotopy equivalences*, Adv. in Math. 32 (1979) 233-279

[HYY] K.Hamada, T.Yamaguchi and S.Yokura, *C-symplectic poset structure on a simply connected space*, preprint

[HKO] Y.Hirato, K.Kuribayashi and N.Oda, *A function space model approach to the rational evaluation subgroups,* Math. Z, 258(3): (2008) 521-555

[JL] B.Jessup and G.Lupton, *Free torus actions and two-stage spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 137(1) (2004) 191-207

[LO] G.Lupton and J.Oprea, *Cohomologically symplectic spaces: toral actions and the Gottlieb group*, Trans. AMS **347** (1995) 261-288

[Y2] T.Yamaguchi, *An estimate in Gottlieb ranks of fibration*, Bull. Belg. Math. Soc. 15 (2008) 663-675

[Y3] T.Yamaguchi, *A rational obstruction to be a Gottlieb map*, J. of Homotopy and Related Structures, **5** (2010) 97-111

[Y4] T.Yamaguchi, *A Hasse diagram for rational toral ranks*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 18 (2011) 493-508

[Y5] T.Yamaguchi, *Examples of a Hasse diagram of free circle actions in rational homotopy*, JP Journal of G. and T. **11** (2011) 181-191

[Y] T.Yamaguchi, *A rational realization problem in Gottlieb group*, preprint

E-mail address: `tyamag@kochi-u.ac.jp`