HOVEY-PALMIERI-STRICKLAND の公理的安定ホモトピー論とその BOUSFIELD 束および HOPKINS の PICARD 群について

下村　克己

1. 公理的安定ホモトピー圏

定義 1.1. $\mathcal{C}$ を閉対称モノイド三角圏とする。

- cofibration と retract について閉じている $\mathcal{C}$ の部分圏 $\mathcal{D}$ を *thick* と呼ぶ。
- 任意の coproduct について閉じている thick 部分圏 $\mathcal{D}$ を *localizing* と呼ぶ。
- $X \in \mathcal{D}, Y \in \mathcal{C}$ に対して $Y \wedge X \in D$ となる thick 部分圏 $\mathcal{D}$ を *ideal* と呼ぶ。localizing 部分圏 $\mathcal{D}$ が ideal であるとき、 *localizing ideal* という。
- $X \in \mathcal{D}, Y \in \mathcal{G}$ に対して $Y \wedge X \in \mathcal{D}$ となる thick 部分圏 $\mathcal{D}$ を $\mathcal{G}$-*ideal* と呼ぶ。

記号 1.2. $\mathcal{S}$ を閉対称モノイド三角圏 $\mathcal{C}$ の対象の系とする。

$\mathrm{thick}\langle\mathcal{S}\rangle$ = $\mathcal{S}$ を含む最小の thick 部分圏
$\mathrm{loc}\langle\mathcal{S}\rangle$ = $\mathcal{S}$ を含む最小の localizing 部分圏
$\mathrm{locid}\langle\mathcal{S}\rangle$ = $\mathcal{S}$ を含む最小の localizing ideal
$\mathcal{G}\text{-id}\langle\mathcal{S}\rangle$ = $\mathcal{S}$ を含む最小の $\mathcal{G}$-ideal

定義 1.3. 閉対称モノイド三角圏 $\mathcal{C}$ の対象 Z は、

- 対象の族 $\{X_i\}$ に対し自然な同型 $\bigoplus[Z, X_i] \to [Z, \coprod X_i]$ があるとき *small* という。
- 対象の族 $\{X_i\}$ に対し自然な同型 $\coprod F(Z, X_i) \to F(Z, \coprod X_i)$ があるとき F-*small* という。
- $Z \in \mathrm{thick}\langle\mathcal{S}\rangle$ のとき、$\mathcal{S}$-**有限**という。

定義 1.4. 閉対称モノイド三角圏 $\mathcal{C}$ が**安定ホモトピー圏**であるとは

$$\mathrm{loc}\langle\mathcal{G}\rangle = \mathcal{C} \text{ となる strongly dualizable な対象の集合 } \mathcal{G}$$

が与えられていて、次の二つをみたすもの。

i) $\mathcal{C}$ の任意の coproduct が存在する。
ii) $\mathcal{C}$ の任意の cohomology functor は representable である。

- $\mathcal{G}$ の任意の対象が small である安定ホモトピー圏を *algebraic* と呼ぶ。
- 単位対象 S が small である algebraic 安定ホモトピー圏を *unital algebraic* と呼ぶ。
- $\mathcal{G} = \{S\}$ となる unital algebraic 安定ホモトピー圏を *monogenic* と呼ぶ。

定理 1.5. $\mathcal{C}$ を安定ホモトピー圏とする。

1) X を *small (resp. F-small, strongly dualizable)* とし、Y を *strongly dualizable* とすると、$X \wedge Y$ はまた *small (resp. F-small, strongly dualizable)* となる。特に *small (F-small, strongly dualizable)* な対象の成す部分圏は $\mathcal{G}$-*ideal* である。
2) $\mathcal{G}$-有限 $\Longrightarrow$ *strongly dualizable* $\Longleftrightarrow$ F-*small.*
3) $\mathcal{C}$ が *algebraic* なら
small $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{G}$-有限 $\Longrightarrow$ *strongly dualizable* $\Longleftrightarrow$ F-*small.*
4) $\mathcal{C}$ が *unital algebraic* なら
small $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{G}$-有限 $\Longleftrightarrow$ *strongly dualizable* $\Longleftrightarrow$ F-*small.*

1.1. Thick subcategory theorem.

定義 1.6. 安定ホモトピー圏 $\mathcal{C}$ の対象の族 $\{K(n) : n \in I\}$ を考える。対象 X(resp. 部分圏 $\mathcal{D}$) の *support* を

$$\operatorname{supp}(X) = \{n : K(n) \wedge X \neq 0\}, \quad (\text{resp. } \operatorname{supp}(\mathcal{D}) = \bigcup_{X \in \mathcal{D}} \operatorname{supp}(X))$$

と置く。small な対象からなる $\mathcal{G}$-ideal $\mathcal{D}$ が

$$\mathcal{D} = \{X : X \text{ finite}, \ \operatorname{supp}(X) \subset \operatorname{supp}(\mathcal{D})\}$$

をみたすとき $\{K(n)\}$ は **$\mathcal{G}$-ideal を定める**という。

定義 1.7. $\mathcal{C}$ を安定ホモトピー圏とする。

(a) $R \in \mathcal{C}$ は結合的な積 $\mu\colon R \wedge R \to R$ と単位元 $\eta\colon S \to R$ を持つとき、**環対象**という。
(b) 環対象 R が任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して、$R \wedge X = \bigvee_\alpha \Sigma^{d_\alpha} R$ となるとき、**体対象**と呼ぶ。

定理 1.8. *algebraic* 安定ホモトピー圏 $\mathcal{C}$ に、次の二つをみたす対象の集合 $\{K(n)\}$ があるとする。

1) 非自明な環対象 R に対し、$K(n) \wedge R \neq 0$ となる n がある。
2) $K(n) \wedge X \neq 0$ である有限対象 X に対し、$\langle K(n) \rangle = \langle K(n) \wedge X \rangle$.

このとき $\{K(n)\}$ は $\mathcal{G}$-*ideal* を定める。

1.2. 局所化.

定義 1.9. 完全関手 $1, L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ と自然変換 $i\colon 1 \to L$ の組 $L = (L, i)$ が下の 3 つの条件を満たすとき**局所化関手**という。

1) 自然変換 $Li\colon L \to L^2$ は同値
2) $\forall X, Y \in \mathcal{C}$, $[LX, LY] \xrightarrow{i_X^*} [X, LY]$ は同型
3) $LX = 0$ なら任意の Y に対し $L(X \wedge Y) = 0$

定理 1.10. $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を安定ホモトピー圏 $\mathcal{C}$ の局所化関手とする。このとき $i_X\colon X \cong LX$ である対象の成す圏 $\mathcal{C}_L$ は安定ホモトピー圏である。

2. Bousfield lattice

定義 2.1. (a) 安定ホモトピー圏 $\mathcal{C}$ の localizing ideal $\langle X \rangle = \{Y : X \wedge Y = 0\}$ を X の **Bousfield 類**という。
(b) Bousfield 類の系 $\mathbb{B}(\mathcal{C})$ に順序を $\langle X \rangle \le \langle Y \rangle \iff \langle X \rangle \supset \langle Y \rangle$ で入れる。この順序により得られる束を **Bousfield 束**と呼ぶ。

命題 2.2. $\mathcal{C}$ を *algebraic* 安定ホモトピー圏とする。

(a) $\langle S \rangle$ は最大の、$\langle 0 \rangle$ は最小の *Bousfield* 類である。
(b) $\langle X \vee Y \rangle = \langle X \rangle \vee \langle Y \rangle$, $\langle X \wedge Y \rangle \le \langle X \rangle \wedge \langle Y \rangle$.
(c) $DL = \{\langle X \rangle : \langle X \rangle \wedge \langle X \rangle = \langle X \rangle\}$ は $\vee$ と $\wedge$ により分配束になる。

2.1. 大川の定理.

$\mathcal{C}$ を安定ホモトピー圏とする。$\mathcal{F} = \operatorname{thick}\langle \mathcal{G} \rangle$ と置き、$\overline{\mathcal{F}}$ で $\mathcal{F}$ の対象の同型類の集合とする。次を仮定する。

1) $|\overline{\mathcal{F}}| = \aleph_0$ かつ $A, B \in \mathcal{F}$ に対して、 $|[A, B]| \le \aleph_0$
2) $\forall X \in \mathcal{C}$, $X \in \operatorname{loc}\langle \mathcal{G} \rangle$.

定義 2.3. $E \in \mathcal{C}$, $A \in \mathcal{F}$ とする。$x \in E_*A$ に対して、x の annihilator ideal を

$$\mathrm{ann}_A(x) = \{f \in [A,B] : [B] \in \overline{\mathcal{F}},\ (E_*f)(x) = 0\}.$$

E の大川類 $\langle\!\langle E \rangle\!\rangle$ を

$$\langle\!\langle E \rangle\!\rangle = \{\mathrm{ann}_A(x) : |A| \in \overline{\mathcal{F}}, x \in E_*A\}.$$

命題 2.4. 大川類の系は濃度が高々$2^{2^{\aleph_0}}$ の集合である。

定理 2.5. $\langle\!\langle E \rangle\!\rangle$ を $\langle E \rangle$ に対応させる全射 $f\colon \mathbb{O}(\mathcal{C}) \to \mathbb{B}(\mathcal{C})$ が存在する。

2.2. **レトラクト予想.**

記号 2.6. 安定ホモトピー圏 $\mathcal{C}$ の Bousfield 類の集合を $B = \mathbb{B}(\mathcal{C})$ とし、$x \wedge y$ を xy, $\inf\{x,y\}$ を $x \wedge y$ で表す。

$$\begin{array}{rclrcl} DL(B) & = & \{x : x^2 = x\} & J(x) & = & \{y : y \le x \wedge a(x)\} \\ N(B) & = & \{x : x^n = 0\ (\exists n \ge 1)\} & A(B) & = & \{x : r(x) = 0\} \\ a(x) & = & \bigvee_{xy=0} y & r(x) & = & \bigvee_{w \le x, w \in DL(B)} w \end{array}$$

レトラクト予想:

A. $\exists h \in B$: $r_*\colon B/J(h) \cong DL(B)$
B. $r_*\colon B/A(B) \cong DL(B)$
C. $r_*\colon B/N(B) \cong DL(B)$

もとのレトラクト予想は p-局所化されたスペクトラムの圏の成す Bousfield 束での予想 A で h を Eilenberg-MacLane spectrum $H\mathbb{Z}/p$ としたものである。

命題 2.7. F を体対象とすると、$\mathbb{B}(\mathcal{C}_F) = \mathbb{Z}/2$. 従って、レトラクト予想は成り立つ。

命題 2.8. スペクトラムの圏で *Morava* の K 理論の余積 $\bigvee_n K(n)$ で局所化された圏 $\mathcal{H}$ についてはレトラクト予想 C は成り立つ。

3. Hopkins' Picard groups

定義 3.1. $\mathcal{C}$ を閉対称モノイド圏とする。同型 $X \wedge Z \to S$ があるとき、X を**可逆**という。可逆な対象の成す充満部分圏を **Picard 圏**と定義する。この圏の同型類に $\wedge$ を積として与えた class を **Picard 群**と呼ぶ。(集合でないこともある) この class を $\mathrm{Pic}(\mathcal{C})$ と書く。

命題 3.2. $\mathcal{C}$ を閉対称モノイド圏とする。*Picard* 圏の任意の対象 X は *strongly dualizable* である。さらに X の逆元は DX である。

補題 3.3. 局所化関手 $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_L$ は準同型 $l\colon \mathrm{Pic}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{C}_L)$ を誘導する。

命題 3.4. $\langle E \rangle \ge \langle F \rangle$ かつ $L_ES = L_FS$ なら $\mathrm{Pic}(\mathcal{C}_E) \subset \mathrm{Pic}(\mathcal{C}_F)$

命題 3.5. $\langle E \rangle \ge \langle F \rangle$ かつ $\mathrm{Pic}(\mathcal{C}_F) = \mathbb{Z}$ なら $\mathrm{Pic}(\mathcal{C}_E)$ は $\mathbb{Z}$ を直和成分に持つ。

References

1. W. G. Dwyer and J. H. Palmieri, Ohkawa's theorem: there is a set of Bousfield classes. Proc. Amer. Math. Soc. , **129(3)** (2001), 881–886.
2. M. Hovey, J. H. Palmieri, and N. P. Strickland, Axiomatic stable homotopy theory, Mem. Amer. Math. Soc. **128/610** (1997).
3. M. Hovey and J. H. Palmieri, The structure of the Bousfield lattice, Contemp. Math. **239**, Amer. Math. Soc., 1999, 175–196.
4. Y. Kamiya and K. Shimomura, Picard groups of some local categories, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **43** (2007), 303–314
5. R. Kato, K. Shimomura and Y. Tatehara, Generalized Bousfield lattices and a generalized retract conjecture, Publ. RIMS Kyoto Univ. **50** (2014), 497–513.