Hom complexes of graphs

松下 尚弘（京都大学）

`arXiv:1605.06222` と `arXiv:1610.05924` に関する解説をする．

二重線及びループのないグラフのことを単純グラフという．単純グラフ G の n-彩色とは G の頂点集合 $V(G)$ から n 点集合への写像 c であって，辺で結ばれている頂点において異なる値を取るものである．Lovász は Kneser 予想の解決においてグラフに対して近傍複体という単体複体を対応させ，近傍複体が n-連結ならばグラフの彩色数が $n+3$ 以上であることを示した． Hom 複体とは二つのグラフ T と G に対して定まる単体複体 $\mathrm{Hom}(T,G)$ であり，近傍複体の一般化である．

Dochtermann は基点がループを持つ点付きグラフのとき,「位相空間に対するループ空間」にあたる構成をグラフに対して行い，グラフのクリーク複体の基本群がクリーク複体の edge-path 群に同型になることの別証明を得た． `arXiv:1610.05924` においては K_2 上のグラフに対して同様の操作を行い，近傍複体に関する既存の結果の別証明を得ることができた．その一つとして，3 以上の整数 n に対し，C_n で n 次のサイクルグラフを表すとき，$\mathrm{Hom}(C_{2n},G)$ の余極限が G の近傍複体の自由ループ空間にホモトピー同値になることが Schultz により証明されているが，その別証明を得た．

グラフ準同型とは，頂点集合の間の写像で，辺で結ばれている頂点を辺で結ばれている頂点に移すものである．グラフ準同型を射としてグラフの圏を考える．`arXiv:1605.06222` においては，グラフの圏にモデル構造を導入し，それが $\mathbb{Z}_2$-空間の圏に Quillen 同値であることを証明した．

本講演では Hom 複体の定義から，その基本的な性質について述べた後，上記のことに関して述べたい．