Stanley-Reisner 環の理論におけるホモロジカルな手法

柳川浩二 (関西大学システム理工学部)

n 変数多項式環 S の被約な単項式イデアルは, n 頂点の単体的複体 Δ に付随しており，その剰余環は (Δ の) **Stanley-Reisner 環**と呼ばれ，極めて素朴なものながら, 組合せ論的可換代数の重要な道具・テーマであり, 現在も活発に研究されている。

筆者は, ホモロジカルな手法を組織的に用いるため, [3] で, Stanley-Reisner 環の「加群版」と言える **squarefree 加群**を導入した。S 上の squarefree 加群の全体は, ごく「小ぶり」なアーベル圏 $\mathrm{Sq}\, S$ をなすが, この上で Stanley-Reisner 環の理論をほぼ過不足なく展開できる (ただし, 単項式以外の元たちで剰余環を取る操作には弱く, 今後の課題と言える)。実際, この概念を用いないと証明できない事実, 用いることで証明が簡略化される既存の結果は多い[1] 。さらに, 導来圏 $D^b(\mathrm{Sq}\, A)$ は興味深い性質を持つ ([4])。本講演では，この理論の基礎部分を紹介する。

ただし，総花的にならないよう, squarefree 加群の応用も含む D'Alì らの最近の論文 [2] の紹介を講演後半の中心とする。なお, 上記論文の主結果の一つは，有限半順序集合 P, 自然数 d と, かなりの「自由度」を持つ追加データから単体的球面を構成するもので，Bier や村井氏の結果の一般化となっている。(荒く言えば，P に一切の大小関係が無い時が，彼らの場合に相当する。)

References

[1] J. Àlvarez Montaner, *Local cohomology supported on monomial ideals*, in “Monomial ideals, computationsand applications”, Lect. Notes in Math., vol. 2083 (2013) pp. 109-178.

[2] A. D'Alì, G. Fløystad and A Nematbakhsh, *Resolutions of co-letterplace ideals and generalizations of Bier spheres*, preprint, 2016, arXiv:1601.02793.

[3] K. Yanagawa, *Alexander duality for Stanley-Reisner rings and squarefree $\mathbb{N}^n$-graded modules,* J. Algebra **225** (2000), 630–645.

[4] K. Yanagawa, *Derived category of squarefree modules and local cohomology with monomial ideal support,* J. Math. Soc. Japan **56** (2004), 289–308.

[1]残念ながら, squarefree 加群を解説した書籍は基本無いが, サーベイ [1] は ややそうした面を持つ。本講演の「補集合」的内容でもあるので, 紹介しておく。