

環のホモロジカル対称条件と深度公式

大竹 優也（名古屋大学大学院 多元数理科学研究科）*

環論において、ホモロジカルな視点と手法に立脚した環とその上の加群の研究は前世紀半ばに勃興し、それ自身大変興味深いのみならず、表現論、代数多様体論、代数的位相幾何学、組合せ論などの隣接分野との関わりの中で肝腎な役割を果たしてきました。環 Λ が **(ee) 条件**、**(ac) 条件** を満たすとは、次の有限生成右 Λ 加群（以下単に Λ 加群とよびます）に関する以下の条件が満足されることをいいます。

- (ee) いかなる Λ 加群 M, N についても、 $\text{Ext}_{\Lambda}^i(M, N) = 0$ が $i \gg 0$ で成り立つことと $\text{Ext}_{\Lambda^{\text{op}}}^i(N, M) = 0$ が $i \gg 0$ で成り立つことは同値である。
- (ac) いかなる Λ 加群 M に対してもある整数 $n(M) > 0$ が存在して、 $\text{Ext}_{\Lambda}^i(M, N) = 0$ が $i \gg 0$ で成り立つような Λ 加群 N に対し、 $\text{Ext}_{\Lambda}^{>n(M)}(M, N) = 0$ が成立する。

可換環に対する (ee) 条件に初めて着眼した Avramov–Buchweitz [AvB] は彼らの台多様体の理論の中で完全交差環が (ee) 条件を満たすことを示しました。Auslander は finitistic dimension conjecture へのアプローチを志向して、いかなる Artin 環も (ac) 条件を満たすか、という問題を提起しました。この Auslander 予想自体には Jorgensen–Sega [JS] により否定的解答が与えられたものの、種々のホモロジカル条件との結び付きにより (ac) 条件は可換環論、非可換環論双方において盛んに研究されています [HJ, JS, Mor, Mor2]。Huneke–Jorgensen [HJ] は可換 Gorenstein 局所環が (ac) 条件を満たすならば (ee) 条件も満たすことを証明しました。他方、環が非可換である場合には同様の主張は一般には成立しないことが毛利 [Mor2] により非可換代数幾何学の手法を用いて示されています。

Ringel–Zhang [RZ] は Gorenstein 環が有する環との Ext 直交条件に関する対称性のみを抽出して、この対称性を備える環を **weakly Gorenstein 環** と呼びました。この講演では、[KLOT] の内容に基づき、上述した (ee) 条件、(ac) 条件、weakly Gorenstein 性、そして Auslander の **深度条件** [Aus] といったホモロジカル条件たちの間の相互関係についてお話ししたいと思います。

参考文献

- [Aus] M. AUSLANDER, Modules over unramified regular local rings, *Illinois J. Math.* **5** (1961), 631–647.
- [AvB] L. L. AVRAMOV; R.-O. BUCHWEITZ, Support varieties and cohomology over complete intersections, *Invent. Math.* **142** (2000), no. 2, 285–318.
- [HJ] C. HUNEKE; D. A. JORGENSEN, Symmetry in the vanishing of Ext over Gorenstein rings, *Math. Scand.* **93** (2003), no. 2, 161–184.
- [JS] D. A. JORGENSEN; L. M. ŠEGA, Nonvanishing cohomology and classes of Gorenstein rings, *Adv. Math.* (2004), no. 2, 470–490.
- [KLOT] K. KIMURA; J. LYLE; Y. OTAKE; R. TAKAHASHI, On the vanishing of Ext modules over a local unique factorization domain with an isolated singularity, preprint (2023), [arXiv:2310.16599](https://arxiv.org/abs/2310.16599).
- [Mor] I. MORI, Symmetry in the vanishing of Ext over stably symmetric algebras, *J. Algebra* **310** (2007), no. 2, 708–729.
- [Mor2] I. MORI, Asymmetry of Ext-groups, *J. Algebra* **322** (2009), no. 6, 2235–2250.
- [RZ] C. M. RINGEL; P. ZHANG, Gorenstein-projective and semi-Gorenstein-projective modules, *Algebra Number Theory* **14** (2020), no. 1, 1–36.

* m21012v@math.nagoya-u.ac.jp