Discrete Morse theory and combinatorial commutative algebra I, II

岡崎亮太 （大阪大学/JST CREST） 柳川浩二 (関西大学)

多項式環 (より一般にアファイン半群環) の様々なイデアルの極小自由分解の記述は, 組合せ論的可換代数のポピュラーな問題である. Bayer と Sturmfels は, **cellular resolution** という概念を導入し, 幾つかの興味深い例を与えた. これは, 自由分解 $P_\bullet$ で, その i 次部分 P_i の free summand が, CW 複体 X_P の i-cell で添え字づけられ, さらに微分写像 $P_i \to P_{i-i}$ が X_P の chain map から得られるものである.

一般に, 多項式環の単項式イデアル I には, Taylor resolution という, 極小とは程遠いが非常に明解な自由分解が存在する. I が r 個の元で生成される場合, これは $(r-1)$-単体に対応する cellular resolution である. V. Welker らは, Forman の**離散モース理論**を用い, この $(r-1)$-単体を「潰す」ことで, 極小 (に近い) 自由分解の構成を試みた. 今回の連続講演の前半では, 彼らの理論を概説する.

後半は, 我々の結果を紹介する. **Borel fixed ideal** は, 多項式環の (かなり特殊な) 単項式イデアルであるが, グレブナ基底の研究で重要である. その極小自由分解は, (トポロジストの) Eliahou と Kervaire によって構成されているが, 彼らの自由分解やそのヴァリエーションが, 離散モース理論経由での cellular 構造を持つこと等を示す (研究動機が異なるせいもあるが, Welker ら自身は, 特別な場合にしか, これを示せなかった). 昨秋以来, 何度か発表している結果であるが, 今回は, 得られた複体の正則性や, それがいつ球体と同相になるか等にまで, 立ち入る予定.