Discrete Morse theory and combinatorial commutative algebra II

柳川 浩二 (関西大学)

(非) 可換代数とトポロジー @信州大学
2012 年 3 月 15 日

1. Borel fixed ideal とその変種

2. Eliahou-Kervaire 型の自由分解と離散モース理論

3. CW 複体 X_A の性質 (正則性、など)

$S := \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$: 体 $\Bbbk$ 上の多項式環
単項式で生成されるイデアル I に対し, 単項式のみからなる I の極小生成系を $G(I)$ と記す.

定義 1.1

イデアル $I \subset S$ が Borel fixed とは, I は単項式イデアルであって, さらに

$$\mathsf{m} \in G(I),\ x_j \mid \mathsf{m},\ i < j \Longrightarrow \frac{x_i}{x_j} \cdot \mathsf{m} \in I$$

を満たすこと.

- "Borel fixed" という用語が正確なのは $\operatorname{char} \Bbbk = 0$ の場合のみだが, 便宜上 $\operatorname{char} \Bbbk \neq 0$ の場合も用いる.
- $\operatorname{char} \Bbbk = 0$ のとき, 斉次イデアル $I \subset S$ の generic initial ideal は Borel fixed. これにより, グレブナ基底の理論や組合せ論的可換代数で重要な概念.

d を正整数とし,

$$\widetilde{S} := \Bbbk[x_{i,j} \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le d]$$

とおく. $I \subset S = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ を, $\forall \mathrm{m} \in G(I)$ に対し $\deg(\mathrm{m}) \le d$ である単項式イデアルとする.

一般に, 単項式 $\mathrm{m} \in S$ は,

$$\mathrm{m} = \prod_{i=1}^{\deg(\mathrm{m})} x_{\alpha_i} \quad \text{with} \quad 1 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_{\deg(\mathrm{m})}$$

と一意的に書ける. (例. $\mathrm{m} = x_1^3 x_2 x_3^2$ のとき $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 2$, $\alpha_5 = \alpha_6 = 3$). このとき, 以下のようにおく.

$$\text{b-pol}(\mathrm{m}) := \prod_{i=1}^{\deg(\mathrm{m})} x_{\alpha_i, i} \in \widetilde{S},$$

$$\text{b-pol}(I) := (\, \text{b-pol}(\mathrm{m}) \mid \mathrm{m} \in G(I)\,) \subset \widetilde{S}.$$

b-pol(m) は squarefree (どの変数についても, 指数が 0 か 1) であることに注意.
任意の単項式イデアルから, squarefree な単項式イデアルを構成する polarization という古典的な手法が有る. b-pol(−) はこれの変種, 記号もそこから取っている.

例 1.2

$n = 3$, $d = 3$ とし, $S = \Bbbk[x_1, x_2, x_3]$ かつ
$I = (x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3^2)$ とする.
このとき $\widetilde{S} = \Bbbk[x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3}]$ で,

$$\text{b-pol}(x_1^2) = x_{1,1}x_{1,2}, \text{b-pol}(x_1x_2) = x_{1,1}x_{2,2}, \cdots, \text{b-pol}(x_2x_3) = x_{2,1}x_{3,2}x_{3,3}$$

であり,

$$\text{b-pol}(I) = (x_{1,1}x_{1,2}, x_{1,1}x_{2,2}, x_{1,1}x_{3,2}, x_{2,1}x_{2,2}, x_{2,1}x_{3,2}x_{3,3}) \subset \widetilde{S}.$$

$$\Theta := \{\, x_{i,1} - x_{i,j} \mid 1 \le i \le n, 2 \le j \le d \,\} \subset \widetilde{S}$$

とおく. $x_{i,j} \mapsto x_i$ が定める環準同型 $\phi : \widetilde{S} \to S$ は, 同型 $\widetilde{S}/(\Theta) \cong S$ を与える.

上の記号で $\phi(\text{b-pol}(I)) = I$. つまり, $\widetilde{S}/(\Theta) \cong S$ 経由で, $\widetilde{S}/(\Theta) \otimes_{\widetilde{S}} \text{b-pol}(I) \cong I$. さらに次が成立.

定理 1.3 (Y-)

I が Borel fixed のとき, $\widetilde{Q}_\bullet$ が b-pol(I) の $\widetilde{S}$-自由分解ならば, $\widetilde{S}/(\Theta) \otimes \widetilde{Q}_\bullet$ は, I の S-自由分解 (極小性も保つ).

注意 1.4

- 前定理の特殊な場合 ($G(I)$ の元の次数が揃っている場合など) は, Nagel, Reiner, Corso によって証明されていた.
- I が一般の単項式イデアルならば, 前定理は不成立.
- 今回の講演では紹介しないが, b-pol(I) は I より豊富な情報を持ち, 抽象単体複体のシフティング理論に現れる shifting operation 等に応用が有る.

Borel fixed ideal の極小自由分解は, S. Eliahou と M. Kervaire によって与えられている (1990 年).
彼らの記述はシンプルだが, 多少の準備が必要.

単項式 $\mathsf{m} \in S$ に対し, $\min(\mathsf{m}) := \min\{\, i \mid x_i$ が m を割り切る $\}$, $\max(\mathsf{m}) := \max\{\, i \mid x_i$ が m を割り切る $\}$ とおく.

$I \subset S$ が Borel fixed のとき, 任意の単項式 $\mathsf{m} \in I$ に対し, 単項式 $\mathsf{m}_1 \in G(I)$ と $\mathsf{m}_2 \in S$ で

$$\mathsf{m} = \mathsf{m}_1 \cdot \mathsf{m}_2 \quad \text{かつ} \quad \max(\mathsf{m}_1) \leq \min(\mathsf{m}_2)$$

を満たすものが一意的に存在. この状況で,

$$g(\mathsf{m}) := \mathsf{m}_1$$

とおく.

例 2.1

Borel fixed ideal $I = (x_1^2, x_1x_2x_3, x_1x_2^2, x_2^3, x_2^2x_3)$ に対し, $x_1x_2^3x_3 = (x_1x_2^2)(x_2x_3)$ より, $g(x_1x_2^3x_3)) = x_1x_2^2$.

定義 2.2

$I \subset S$ を Borel fixed ideal とする. $F = \{i_1, \ldots, i_q\} \subset \mathbb{N}$ に対し, (F, m) が I の admissible pair とは, $\mathsf{m} \in G(I)$ かつ $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_q < \max(\mathsf{m})$ であること.
(ただし, $\forall \mathsf{m} \in G(I)$ に対し, $(\emptyset, \mathsf{m})$ は admissible pair とする.)

例 2.3

I を例 2.1 の Borel fixed ideal とすると, 任意の $F \subset \{1, 2\}$ に対し, $(F, x_2^2x_3)$ は admissible pair.

I を Borel fixed ideal とする.

I の admissible pair (F, m) に対し, 基底 $e(F, \mathrm{m})$ を対応させる.

$\mathrm{AP}_q(I) :=$ ((F, m), $\#F = q$ なる I の admissible pair 全体の集合).
とおく.

鎖複体 $L_\bullet$ を以下のように定める. 各 $q \in \mathbb{N}$ に対し,

$$L_q := \bigoplus_{(F,\mathrm{m}) \in \mathrm{AP}_q(I)} S\, e(F, \mathrm{m})$$

とおく.

$F = \{i_1, \ldots, i_q\} \subset \mathbb{N}$ なる admissible pair (F, m) に対し, 微分写像 $\partial : L_q \to L_{q-1}$ は以下のように定める.

$$
\begin{aligned}
\partial(e(F,\mathrm{m})) = \quad & \sum_{r=1}^{q} (-1)^r \cdot x_{i_r} \cdot e(F \setminus \{i_r\}, \mathrm{m}) \\
& - \sum_{r=1}^{q} (-1)^r \cdot \frac{x_{i_r}\mathrm{m}}{g(x_{i_r}\mathrm{m})} \cdot e(F \setminus \{i_r\}, g(x_{i_r}\mathrm{m})).
\end{aligned}
$$

ここで, $(F \setminus \{i_r\}, g(x_{i_r}\mathrm{m}))$ が admissible でなければ, $e(F \setminus \{i_r\}, g(x_{i_r}\mathrm{m})) = 0$ とする.
($(F \setminus \{i_r\}, \mathrm{m})$ は常に admissible であることに注意).

例 2.4

Borel fixed ideal $I = (x_1, x_2, x_3)^3 \subset \Bbbk[x_1, x_2, x_3]$ に対し,
$(\{1,2\}, x_1x_2x_3)$ は admissible pair だが,

$$\partial(e(\{1,2\}, x_1x_2x_3)) = \begin{aligned} &- x_1 \cdot e(\{2\}, x_1x_2x_3) + x_2 \cdot e(\{1\}, x_1x_2x_3) \\ &- x_3 \cdot e(\{1\}, x_1x_2^2), \end{aligned}$$

$g(x_1(x_1x_2x_3)) = x_1^2x_2$ より, $(\{2\}, x_1^2x_2)$ は admissible ではなく,
$e(\{2\}, x_1x_2^2)$ は上の式の右辺にあらわれない.

定理 2.5 (Eliahou-Kervaire)

上で定めた $L_\bullet$ は, Borel fixed ideal I の極小自由分解を与える.

以下, $L_\bullet$ を I の EK 自由分解と呼ぶ.

Borel fixed ideal I の EK 自由分解は, b-pol(I) に持ち上がらない.
一工夫必要.

定義 2.6

単項式 $\mathsf{m} \in S$ と $1 \leq i < \max(\mathsf{m})$ なる整数 i に対し
(復習しておくと, $\max(\mathsf{m}) := \max\{\, i \mid x_i \text{ divides } \mathsf{m} \,\}$),

$$\mathfrak{b}_i(\mathsf{m}) := (x_i/x_k) \cdot \mathsf{m} \quad (\text{ここで} \quad k := \min\{\, l > i \mid x_l \text{ divides } \mathsf{m} \,\})$$

とおく.

注意 2.7

I が Borel fixed ならば, $\mathsf{m} \in I \Longrightarrow \mathfrak{b}_i(\mathsf{m}) \in I$.

簡単の為, 以下のように略記.

$$\widetilde{\mathrm{m}} := \text{b-pol}(\mathrm{m}), \qquad \widetilde{I} := \text{b-pol}(I).$$

定義 2.8

$\widetilde{F} = \{ (i_1, j_1), \dots, (i_q, j_q) \} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ と単項式 $\mathrm{m} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}$ に対し, $(\widetilde{F}, \widetilde{\mathrm{m}})$ が $\widetilde{I}$ の admissible pair とは次が満たされること.

- $\mathrm{m} \in G(I)$ (言いかえると, $\widetilde{\mathrm{m}} \in G(\widetilde{I})$),
- $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_q < \max(\mathrm{m})$,
- $\forall r$ に対し $j_r = 1 + \sum_{i=1}^{i_r} a_i$.

(ただし, $\forall \mathrm{m} \in G(I)$ に対し $(\emptyset, \widetilde{\mathrm{m}})$ は admissible pair とする.)

注意 2.9

$\widetilde{F} = \{ (i_1, j_1), \dots, (i_q, j_q) \} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ とし, $(\widetilde{F}, \widetilde{\mathrm{m}})$ が $\widetilde{I}$ の admissible pair とする.

- $1 \le j_1 \le j_2 \le \cdots \le j_q$.
- $\forall r$ に対し $(\widetilde{F} \setminus \{i_r, j_r\}, \widetilde{\mathrm{m}})$ は admissible pair.
- $F = \{ i_1, \dots, i_q \}$ とすると, (F, m) は I の admissible pair. これにより, $\widetilde{I}$ の admissible pair と, I のそれは, 一対一対応.

$\widetilde{I}$ の admissible pair $(\widetilde{F}, \widetilde{\mathrm{m}})$ に対し, 基底 $e(\widetilde{F}, \widetilde{\mathrm{m}})$ を対応させる.

$\mathrm{AP}_q(\widetilde{I})$: $\widetilde{I}$ の admissible pair $(\widetilde{F}, \widetilde{\mathrm{m}})$ で $\#\widetilde{F} = q$ であるもの全体の集合.

鎖複体 $\widetilde{P}_\bullet$ を以下のように定める.
各 $q \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\widetilde{P}_q := \bigoplus_{(\widetilde{F}, \widetilde{\mathrm{m}}) \in \mathrm{AP}_q(\widetilde{I})} \widetilde{S}\, e(\widetilde{F}, \widetilde{\mathrm{m}})$$

とおく.

微分写像は多少複雑. 次頁で.

簡単の為, $\mathsf{m} \in G(I)$ と $i < \max(\mathsf{m})$ に対し, 以下のように略記.

$$\mathsf{m}_{(i)} := g(\mathfrak{b}_i(\mathsf{m})) \in G(I), \qquad \widetilde{\mathsf{m}}_{(i)} := \text{b-pol}(\mathsf{m}_{(i)}) \in G(\widetilde{I}).$$

admissible pair $(\widetilde{F}, \widetilde{\mathsf{m}})$ $(\widetilde{F} = \{(i_1, j_1), \dots, (i_q, j_q)\})$ に対し,

$$\begin{aligned}\partial(e(\widetilde{F}, \widetilde{\mathsf{m}})) = \quad & \sum_{r=1}^{q} (-1)^r \cdot x_{i_r, j_r} \cdot e(\widetilde{F} \setminus \{(i_r, j_r)\}, \widetilde{\mathsf{m}}) \\ & - \sum_{r=1}^{q} (-1)^r \cdot \frac{x_{i_r, j_r} \cdot \widetilde{\mathsf{m}}}{\widetilde{\mathsf{m}}_{(i_r)}} \cdot e(\widetilde{F} \setminus \{(i_r, j_r)\}, \widetilde{\mathsf{m}}_{(i_r)}).\end{aligned}$$

ここで, $(\widetilde{F} \setminus \{(i_r, j_r)\}, \widetilde{\mathsf{m}}_{(i_r)})$ が admissible でなければ,
$e(\widetilde{F} \setminus \{(i_r, j_r)\}, \widetilde{\mathsf{m}}_{(i_r)}) = 0$ とする.

例 2.10

Borel fixed ideal $I = (x_1, x_2, x_3)^3 \subset \Bbbk[x_1, x_2, x_3]$ に対し,

$(x_{1,1}x_{3,2}x_{3,3})_{(2)} = x_{1,1}x_{2,2}x_{3,3}$ で, $e(\{(1,2)\}, x_{1,1}x_{2,2}x_{3,3})$ は admissible だが,

$(x_{1,1}x_{3,2}x_{3,3})_{(1)} = x_{1,1}x_{1,2}x_{3,2}$ で, $e(\{(2,2)\}, x_{1,1}x_{1,2}x_{3,3})$ は admissible でない, よって,

$$\begin{aligned} & \partial(e(\{(1,2),(2,2)\}, x_{1,1}x_{3,2}x_{3,3})) \\ = & -x_{1,2}\cdot e(\{(2,2)\}, x_{1,1}x_{3,2}x_{3,3}) + x_{2,2}\cdot e(\{(1,2)\}, x_{1,1}x_{3,2}x_{3,3}) \\ = & -x_{3,2}\cdot e(\{(1,2)\}, x_{1,1}x_{2,2}x_{3,3}). \end{aligned}$$

定理 2.11 (Okazaki-Y)

Borel fixed ideal I の b-pol(I) に対し, 我々の $\widetilde{P}_\bullet$ は極小自由分解を与える.

- Borel fixed ideal I 自身も b-pol(I) も, linear quotients を持ち, Batzies-Welker (以下, BW) の論法が使え, 「離散モース理論」経由で得られる CW 複体を台とする極小自由分解が存在.
- 一般に斉次イデアルの極小自由分解は, 鎖複体として, 同型を除いて一意的. しかし, その「記述」は, 基底の取り方に依存する. とくに, 「CW 複体を台とする」という性質は, 基底の取り方に依る.
- よって, Borel fixed ideal I の EK 自由分解や, b-pol(I) の我々の自由分解が, Batzies-Welker の構成と, 基底の選び方が一致するかは, 興味深い問題.

定理 2.12 (Okazaki-Y.)

Borel fixed ideal I の b-pol(I) に関する 我々の極小自由分解 $\widetilde{P}_\bullet$ は, BW の記述 (基底の取り方) と一致. よって, 離散モース理論で構成される CW 複体 X_A を台に持つ.

$\Theta := \{ x_{i,1} - x_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 < j \leq d \} \subset \widetilde{S}$ とおくと,
$\widetilde{S}/(\Theta) \otimes_S \widetilde{P}_\bullet$ は, I の極小自由分解であった. これも X_A を台に持つ.

I の極小自由分解 $\widetilde{S}/(\Theta) \otimes_S \widetilde{P}_\bullet$ は, EK 自由分解とは基底の取り方が異なる. EK 自由分解が, BW の理論の枠組みに乗るかは不明 (「乗る」と予想はしている).

BW の論法では, $G(I)$ のべき集合 $2^{G(I)}$ を $(\#G(I)-1)$-単体と見て, これに離散モース理論を施す. 具体的には,

$\mathrm{m} \in G(I)$ と $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_q < \max(\mathrm{m})$ なる $F = \{i_1, i_2, \ldots, i_q\}$ に対する

$$\{\mathrm{m}_{(i_l)} \mid 1 \leq l \leq q\} \cup \{\ \mathrm{m}\ \} \tag{1}$$

という形の集合のみが, critical となるような acyclic matching A が存在. (昨日の岡崎氏の講演の通り)

上の状況で, $j_1, \ldots, j_q \in \mathbb{N}$ が一意的に存在し, $(\widetilde{F}.\widetilde{\mathrm{m}})$, $\widetilde{F} = \{\,(i_1, j_1), \ldots, (i_q, j_q)\,\}$, が (1) に対応する admissible pair となる.

BW の方法で構成した自由分解が, 我々の $\widetilde{P}_\bullet$ と同じ記述であることを示すには, 次の 2 点を確認する必要がある.

両者が admissible pair ならば, $(\widetilde{F}, \widetilde{\mathrm{m}})$ から $(\widetilde{F} \setminus \{(i_r, j_r)\}, \widetilde{\mathrm{m}}_{(i_r)})$ へ, gradient path が唯一つ存在.
さらに, この path が与える符号が, $\widetilde{P}_\bullet$ の符号と一致.

根性で示す.

$(\widetilde{F}, \widetilde{\mathrm{m}})$ から次元を一つだけ落とす gradient path は, $(\widetilde{F} \setminus \{(i_r, j_r)\}, \widetilde{\mathrm{m}})$ や $(\widetilde{F} \setminus \{(i_r, j_r)\}, \widetilde{\mathrm{m}}_{(i_r)})$ を終点とするもの以外には存在しない.

$x_{i,j}$ の添え字が 2 重であることが効き, 楽に示せる.
EK 自由分解について考察する際は, ここがネックとなる.

昨日の岡崎氏の講演にも出てきたが ⋯ (ただし, 簡単の為, 以下 CW 複体は cell が有限個であることを常に仮定する.)

定義 3.1

CW 複体 $X^{(*)}$ が正則とは, 任意の cell σ に対し, 特性写像 $f_\sigma : B^i \to \overline{\sigma}$ が同相であること. (一般には, B^i の内点への制限が同相としか仮定しない.)

注意 3.2

- CW 複体 $X^{(*)}$ が正則ならば, 各 cell σ に対し, 境界 $\partial\sigma := \overline{\sigma} \setminus \sigma$ は, 幾つかの (より次元の低い) cell の和集合.
- 重心細分 (barycentric subdivision) が使える. 次頁で詳述.
- 離散モース理論は, (基本的に) 正則 CW 複体を適応対象とするが, 結果として得られる複体が正則とは限らない.

組合せ論では, 半順序集合 (Partially Ordered SET) のことを, poset という (本講演では, poset は常に有限集合と仮定).

定義 3.3

P を poset とする. 部分集合 C が鎖 (chain) とは, $\forall x, y \in C$ が比較可能 (i.e., $x \succeq y$ か $y \succeq x$ の一方が成立) なこと.

P の鎖全体の集合を $\Delta(P)$ と記す. これは抽象単体的複体なので, P の order complex と言う.

CW 複体 $X^{(*)}$ を, 以下のようにして poset とみなす.

$$\sigma \succeq \tau \overset{\text{def}}{\iff} \overline{\sigma} \supseteq \tau$$

この poset を $P_{X^{(*)}}$ と記す.

命題 3.4

$X^{(*)}$ が正則な CW 複体ならば, order complex $\Delta(P_{X^{(*)}})$ は, X の下の位相空間の単体分割を与える．これを $X^{(*)}$ の重心細分 (barycentric subdivision) という．

定義 3.5 (Björner)

ある正則な CW 複体 $X^{(*)}$ があって, $P_{X^{(*)}}$ に最小元 $\hat{0}$ を加えたものと同型となるような poset のことを, CW poset と言う．

poset P の元 x, y に対し,

$$[x, y] := \{ z \in P \mid x \preceq z \preceq y \}$$

とおく. 最小元 $\hat{0}$ が存在すれば,

$$[\hat{0}, x] = \{ y \in P \mid y \preceq x \}.$$

各 $x \in P$ に対して, subposet $[\hat{0}, x]$ の極大な鎖が全て同じ位数ならば, P は graded poset と言う. このとき,

$$\rho(x) := \ [\hat{0}, x] \text{ の極大な鎖の位数} - 1$$

CW 複体 $X^{(*)}$ が正則ならば, $P_{X^{(*)}} \sqcup \{\hat{0}\}$ は graded で,

$$\rho(\sigma) = \dim \sigma.$$

I を Borel fixed ideal とし, X_A を上で構成した CW 複体とする. $P_{X_A} \sqcup \{\hat{0}\}$ が CW poset であるか否かをチェックするのが, 当面の目標.
以下の定理は著名であり, 我々の場合にも有効.

定理 3.6 (Björner)

以下の条件を満たせば, P は CW poset となる.

(i) P は graded. とくに, 最小元 $\hat{0}$ を持つ.
(ii) $\forall x, y \in P$ with $x \prec y$, $\rho(y) = \rho(x) + 2$ に対し, $[x, y]$ は 4 つの元からなる.
(iii) $\forall x \in P$ に対し, $\Delta([\hat{0}, x])$ は shellable.

$P_{X_A} \sqcup \{\hat{0}\}$ が, 上の定理の条件 (i) を満たすのは明らか. (ii), (iii) が問題となる.

一般に poset P において, $x, y \in P$ が $x \prec y$ であって, かつ x と y の間に他の元が存在しないとき, y は x を cover すると言う.

P_{X_A} の元は admissible pair $(\widetilde{F}, \widetilde{\mathrm{m}})$ と同一視されるが, これに cover される元は,

$$(\widetilde{F} \setminus \{(i_r, j_r)\}, \widetilde{\mathrm{m}}) \qquad \text{と} \qquad (\widetilde{F} \setminus \{(i_r, j_r)\}, \widetilde{\mathrm{m}}_{(i_r)})$$

の 2 種類のみ. 前者は任意の r で OK だが, 後者は r の値によっては admissible ではなく (P_{X_A} の元にならない), やや複雑.

条件 (ii) が満たされることは, 真面目に計算すると確認できる. 残りは条件 (iii) のみ.

そもそも, "shellable" とは ⋯

(有限) 単体的複体 Δ に対し, 包含関係で極大な単体を, Δ の facet という.
全ての facet が同じ次元を持つとき, Δ は pure という.

定義 3.7

単体的複体 Δ が shellable とは, 次が満たされること.

- Δ は pure.
- Δ の全ての facet を, $F_1, \ldots, F_k$ と並べ, $1 \leq \forall j < k$ に対し,

$$\left(\bigcup_{i=1}^{j} F_i\right) \cap F_{j+1}$$

が $\dim \Delta - 1$ 次元の pure な複体となるようにできる.

- 各面が単体である高次元凸多面体の表面を単体的複体と見たものは, 常に shellable.
- (境界を許す) 多様体 M が shellable な単体分割を持てば, M は球面または閉球体. これが, CW poset に関する Björner の定理のベースにある事実.
- 3 次元以上の球面の単体的分割で, shellable でないものが存在.

我々の場合でも, shellable 性を直接示すのは非常に難しい.
そこで, edge labeling という手法を用いる.
(Eliahou-Kervaire resolution が, 正則な CW 複体で support されることを示した T.B. Clark が既に使った論法.)

P を最小元 $\hat{0}$ と最大元 $\hat{1}$ を持つ graded poset とする. y が x を cover するような各組 (x, y) に対し, 整数 $\lambda(x, y)$ を一定の条件 (かなり強いものだが, 詳細は略) を満たすように割り当てる.

$\rho(\hat{1}) = l$ ならば, P の極大鎖は $l+1$ 個の元 (よって l 個の "covering pair") からなるが, 上の λ により, 各極大鎖が l 項整数ベクトルでラベル付けられる. 極大鎖を, 対応するラベルの辞書式順序で並べると, shellable の条件を満たす.

この手法で shellable であることが示される poset を, EL shellable と言う (Björner-Wachs の仕事).

我々の poset P_{X_A} において covering pair は,

$$\alpha := (\widetilde{F}, \widetilde{\mathrm{m}}), \quad \beta := (\widetilde{F} \setminus \{(i_r, j_r)\}, \widetilde{\mathrm{m}}), \quad \beta' := (\widetilde{F} \setminus \{(i_r, j_r)\}, \widetilde{\mathrm{m}}_{(i_r)})$$

としたときの, (α, β), (α, β') の 2 種.
(前述の通り, β' の場合は r の選び方が, やや複雑)

上の状況で,

$$\lambda(\alpha, \beta) = -i_r, \qquad \lambda(\alpha, \beta') = i_r$$

とラベル付けると, P_{X_A} の各閉区間は EL shellable となる.

これで, $P_{X_A} \sqcup \{\hat{0}\}$ が CW poset であることが示された.

定理 3.8

I を Borel fixed ideal, X_A を前節で (離散モース理論を用いて) 構成した CW 複体とする．このとき，$P_{X_A} \sqcup \{\hat{0}\}$ は CW poset.

$\Delta(P_{X_A})$ は可縮であることが，容易に確認できる．

Forman の証明が完全には理解できないので，彼の離散モース理論が，どの程度「構成的」なのか良く分からない．

ただし，CW poset P_{X_A} を与える正則 CW 複体は，離散モース理論で構成する複体が持つべき性質を全て満たしている．
その意味で，「X_A は正則にできる」と言える．

可換環論では Cohen-Macaulay 環というクラスが非常に重要.

$I \subset S$ が Borel fixed ideal で $\mathrm{codim}(I) = c$ のとき

S/I が Cohen-Macaulay $\Longleftrightarrow$ $G(I)$ の元が全て $x_1, \ldots, x_c$ の単項式

定理 3.9 (Okazaki-Y)

I を Borel fixed ideal で S/I が Cohen-Macaulay なものとする．このとき, CW 複体 X_A は閉球体と同相 (次元は $\mathrm{codim}(I) - 1$).

証明には, 次の事実を用いる.

定理 3.10 (よく知られたもの)

d 次元単体的複体 Δ が次の条件を満たすとき, Δ の位相空間は d 次元球面か 閉球体と同相.

(i) 任意の $d-1$ 次元の面は, 高々2 個の d 次元の面に含まれる.

(ii) Δ は constructible (shellable と似た概念だが, だいぶ弱い).

X_A は球面と同相にはなり得ないので, $\Delta(P_{X_A})$ が, 上の 2 条件, 特に (ii) を満たすことを確かめる.

例 3.11

実際には, Cohen-Macaulay 性より弱い条件 (技術的かつ煩雑なので, 省略) で, X_A が閉球体と同相と言える.

$I = (x^2, xy^2, xyz, xyw, xz^2, xzw)$ は (Cohen-Macaulay でない)Borel fixed ideal であって, 上述の条件を満たす.
以下, 我々の自由分解 $\widetilde{S}/(\Theta) \otimes_{\widetilde{S}} \widetilde{P}_\bullet$ と EK 自由分解 $L_\bullet$ を与える CW 複体を, それぞれ図示する.

例 3.11 (続き)

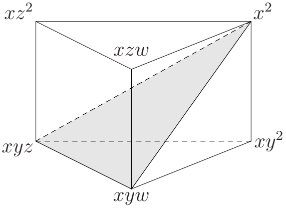

Figure: $\widetilde{S}/(\Theta) \otimes_{\widetilde{S}} \widetilde{P}_\bullet$ の場合

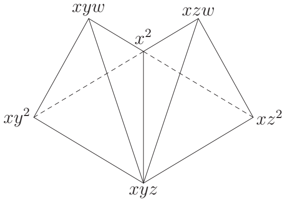

Figure: $L_\bullet$ の場合

どちらも, 頂点が 6 つ, 辺が 11 本, 面が 8 つ, 立体が 2 つで, 極小自由分解は $0 \longrightarrow S^2 \longrightarrow S^8 \longrightarrow S^{11} \longrightarrow S^6 \longrightarrow 0.$

一方, $\widetilde{S}/(\Theta) \otimes_{\widetilde{S}} \widetilde{P}_\bullet$ が台とする CW 複体は球と同相だが, $L_\bullet$ のものは異なる.

参考文献

トポロジストが書いた離散モース理論の文献については, 栗林先生や玉木先生の方が遥かに良くご存じと思うので, 載せていない.
また, 第3節の内容については準備中.

- E. Batzies and V. Welker, *Discrete Morse theory for cellular resolutions*, J. Reine Angew. Math. **543** (2002), 147–168.
- S. Eliahou and M. Kervaire, *Minimal resolutions of some monomial ideals*, J. Algebra **129** (1990), 1–25.
- R. Okazaki and K. Yanagawa, *Alternative polarizations of Borel fixed ideals, Eliahou-kervaire type and discrete Morse theory*, preprint (`arXiv:1111.6258`).
- V. Welker, *Discrete morse theory and free resolutions*, in Algebraic Combinatorics (叢書 Universitext の一冊), Springer, 2007.
- K. Yanagawa, *Alternative polarizations of Borel fixed ideals*, to appear in Nagoya. Math. J. (`arXiv:1011.4662`).