Morse theory and Lescop's equivariant propagator

渡邉忠之 (島根大学大学院総合理工学研究科)

M を $b_1(M)=1$ を満たす 3 次元多様体とする。M 上の $\mathbb{Z}$ **同変配置空間** $\mathrm{Conf}_{K_2}(M)$ を、次の条件を満たす組 (x_1,x_2,γ) の集合とする。

1. $x_1, x_2 \in M$, $x_1 \neq x_2$
2. γ は x_1 から x_2 へ至る道 $c:[0,1]\to M$ のボルディズム類

γ を忘れる自然な写像 $\mathrm{Conf}_{K_2}(M)\to \mathrm{Conf}_2(M)=M\times M\setminus\Delta_M$ は無限巡回被覆となる。$\mathrm{Conf}_2(M)$ の定義で対角線集合 Δ_M を引く代わりに Δ_M に沿った blow-up（Δ_M をその normal sphere bundle で置き換える）を行うと、$\mathrm{Conf}_2(M)$ の Fulton-MacPherson コンパクト化 $\overline{\mathrm{Conf}}_2(M)$ が得られる。同様に、Δ_M のリフトに沿った blow-up をすると、$\mathrm{Conf}_{K_2}(M)$ の「閉包」$\overline{\mathrm{Conf}}_{K_2}(M)$ が得られる。

Lescop 氏は、$\overline{\mathrm{Conf}}_{K_2}(M)$ 内の同変交差理論によって $b_1(M)=1$ の 3 次元多様体 M の不変量を定義した。その主要項は、ある境界条件を満たす「基本的」な 4 次元チェイン (**同変プロパゲーター**)[1]

$$Q\in C_4(\overline{\mathrm{Conf}}_{K_2}(M))\otimes_{\mathbb{Q}[t,t^{-1}]}\mathbb{Q}(t)$$

の同変 3 重交差 $\langle Q,Q,Q\rangle_{\mathbb{Z}}$ により与えられる。Lescop 氏の不変量は大槻知忠氏の $\mathbb{Z}$ 同変不変量の 2 ループ部分の類似とみなせる。Lescop 氏はホモロジー論の議論を用いて同変プロパゲーターが存在することを示していたが、私は S^1 上の曲面束であるような M 内の「アミダくじ的パス（AL パス)」というものを考え、そのモジュライ空間からの写像によって同変プロパゲーターを具体的に与えた。それを使うと、曲面束 M の Lescop 不変量が、アミダくじ的グラフ (AL グラフ) の母関数のトレース (+ 補正項) として組み合わせ的に表示されることがわかる。

講演では、以上のことを概説する。

[1] Q のポアンカレ双対は $H^2(\overline{\mathrm{Conf}}_2(M);\mathbb{Q}(t))\cong\mathbb{Q}(t)$ を生成する。