Diffeology と微分形式 I

岩瀬 則夫

九州大学 数理学研究院

空間の代数的・幾何的モデルとその周辺

18–20 Aug 2015

始めに　　Refs

Diffeology	—	Spaces/Maps
Construction	—	Induced diffeology/Mapping sp
de Rham complex	—	Differential form/Partition of unity
Application	—	Homotopy/Mayer-Vietoris seq

Diffeology

Diffeology	—	Spaces/Maps
Construction	—	Induced diffeology/Mapping sp
de Rham complex	—	Differential form/Partition of unity
Application	—	Homotopy/Mayer-Vietoris seq

Diffeology

Diffeology – Spaces/Maps

Diffeology I

定義 $n \geq 0$ を自然数とする。

1. $\mathbb{R}^n$ の開集合を n-domain あるいは単に domain と呼び、その全体を Domain_n で表す。また $\mathrm{Domain} = \bigcup_n \mathrm{Domain}_n$ とする。
2. n-domain から集合 X への写像を X の n-parametrization と呼び、$\mathrm{Param}_n(X)$ で表す。また、$\mathrm{Param}(X) = \bigcup_n \mathrm{Param}_n(X)$ とする。

定義 (Diffeology) $\mathcal{D}$ を X の parametrizations の集合とする。$\mathcal{D}$ が X の diffeology であるとは次の三条件を満たすことである。

1. $\forall_{x \in X}\ \forall_{n \in \mathbb{N}_0}\ \exists_{c(x) \in \mathcal{D} \cap \mathrm{Param}_n(X)}$ s.t. $\mathrm{im}\, c(x) = \{x\}$
2. $P \in \mathrm{Param}_n(X)\ \&\ \forall_{s \in U}\ \exists_{V \in \mathrm{Domain}_n}\ s \in V \subset U,\ P|_V \in \mathcal{D} \implies P \in \mathcal{D}$
3. $\forall_{(P:U \to X) \in \mathcal{D}}\ \forall_{F \in C^\infty(V,U)}\ P \circ F \in \mathcal{D}$

$\mathcal{D}$ の要素である parametrization を plot と呼ぶ。

Diffeology II

定義 (C$^\infty$-map) $f:(X,\mathcal{D}_X)\to(Y,\mathcal{D}_Y)$ が C$^\infty$-map とは、f が次を満たすことである。

$$\forall_{P\in\mathcal{D}_X}\ f\circ P\in\mathcal{D}_Y$$

定義 C$^\infty$-diffeological space と C$^\infty$-map 全体のなす圏を Diff^∞ で表す。

例 (標準的な diffeology) n-domain U は、任意の domain V から domain U への C$^\infty$-級写像全体を diffeology として diffeological space となる。

定理 (標準的な diffeology) Diffeological space $X=(X,\mathcal{D})$ に対して、domain U 上の plot 全体 $\mathcal{D}(U)$ は、U から X への C$^\infty$-級写像全体に一致する。

Diffeology から Topology

定義 (位相) $A \subset X$ が diffeological space $X = (X, \mathcal{D})$ の開集合であるとは、次が成立することである。

$$\forall_{(P:U \to X) \in \mathcal{D}} \; P^{-1}(A) : \text{open in } U$$

この開集合の全体のなす開集合系により、X には位相構造が入る。

注 開集合系により、閉集合やコンパクト集合などが通常通り導入される。

系 (連続写像) C^∞-map は、これを位相空間の間の写像とみなすとき、その定義から連続写像である。

Topology から Diffeology

定義 (Diffeology) 位相空間 X に対して、$\mathcal{D}$ を次で定める。

$$P \in \mathcal{D} \iff P \text{ is a continuous map from } U \text{ to } X.$$

これにより、$X = (X, \mathcal{D})$ は diffeological space となる。

系 (C^∞-map) 連続写像は、これを diffeological space の間の写像とみなすとき、その定義から C^∞-map である。

Smooth structure から Diffeology

定義 (Diffeology) Smooth manifold $M = (M, \mathcal{U})$ に対して、$\mathcal{D}$ を次で定める。

$$P \in \mathcal{D} \iff P \text{ is a smooth map from } U \text{ to } M.$$

これにより、$M = (M, \mathcal{D})$ は diffeological space となる。

系 (C^∞-map) Smooth manifolds の間の smooth map は、これを diffeological spaces の間の写像とみなせば、C^∞-map である。

注 多様体と位相空間の間にある圏、例えば V-manifold の圏なども自然に diffeological space の圏に充満部分圏として埋め込める。

Construction

Diffeology	—	Spaces/Maps
Construction	—	Induced diffeology/Mapping sp
de Rham theory	—	Differential form/Partition of unity
Application	—	Homotopy/Mayer-Vietoris seq

Construction

Construction — Induced diffeology/Ma

Induced diffeology

定義 (pull-back/push-forward) $f : X \to Y$ を集合の間の写像とする。

1. $(Y = (Y, \mathcal{D}_Y)$ を diffeological space とする。f が C^∞-map になる最も粗い（最多となる）X の diffeology を $\mathcal{D}_Y$ の f による pull-back と呼び、$f^*(\mathcal{D}_Y)$ で表す。
2. $(X = (X, \mathcal{D}_X)$ を diffeological space とする。f が C^∞-map になる最も細かい（最少となる）Y の diffeology を $\mathcal{D}_X$ の f による push-forward と呼び、$f_*(\mathcal{D}_X)$ で表す。

例

1. diffeological space $(X, \mathcal{D})$ の部分集合 $A \subset X$ に対して、包含写像 $i : A \hookrightarrow X$ による $\mathcal{D}$ の pull-back $i^*(\mathcal{D})$ を subset diffeology と呼ぶ。
2. diffeological space $(X, \mathcal{D})$ の商空間 $X \twoheadrightarrow B$ に対して、射影 $p : X \twoheadrightarrow B$ による $\mathcal{D}$ の push-forward $p_*(\mathcal{D})$ を quotient diffeology と呼ぶ。

product and function diffeologies

定義 $\{X_j = (X_j, \mathcal{D}_j)\}_{j\in J}$ を diffeological spaces の族とする。

1. 任意の $j \in J$ に対して射影 $p_j : \prod_{j\in J} X_j \to X_j$ が C^∞ 級になる最も粗い $\prod_{j\in J} X_j$ の diffeology を、product diffeology と呼ぶ。

二つの parametrizations $P : U \to C^\infty(X, Y)$ と $Q : V \to X$ に対して、parametrization $P{\cdot}Q : U{\times}V \to Y$ を次で定義する。

$$(P{\cdot}Q)(s, t) = P(s)(Q(t)), \quad s \in U, \ t \in V$$

定義 $X = (X, \mathcal{D}_X)$ と $Y = (Y, \mathcal{D}_Y)$ を二つの diffeological spaces とする。

1. 次を満たす parametrization $P : U \to C^\infty(X, Y)$ 全体は $C^\infty(X, Y)$ の diffeology になる。

$$\forall_{(Q:V\to X)\in\mathcal{D}_X} \ P{\cdot}Q \in \mathcal{D}_Y$$

de Rham theory

Diffeology	—	C^∞-Spaces/Maps
Construction	—	Induced diffeology/Mapping sp
de Rham theory	—	Differential form/Partition of unity
Application	—	Homotopy/Mayer-Vietoris seq

de Rham theory

de Rham theory – Differential form/Pa

Exterior algebra

$T_n^* = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{R}\, dx_i$ （$\{dx_i\}$ は標準基底 $\{e_i\}$ の双対）とする。

定義（外積） T_n^* 上の外積代数 $\Lambda^*(T_n^*) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p(T_n^*)$ を用い、n-domain U 上の p-form の全体 $\Lambda^p(U)$（$p \geq 0$）と domain の間の写像 $g : V \to U$ の誘導する写像 $\Lambda^p(g) = g^* : \Lambda^p(U) \to \Lambda^p(V)$ を次で定める。

1. $\forall_{U \in \mathrm{Domain}_n}\ \Lambda^p(U) = C^\infty(U, \Lambda^p(T_n^*))$
2. $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1,\cdots,i_p}(\boldsymbol{x})\ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ （$\boldsymbol{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$）に対して

$$g^*(f)(\boldsymbol{y}) = \sum_{j_1 < \cdots < j_p} b_{j_1,\cdots,j_p}(\boldsymbol{y}) \cdot dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_p} \quad (\boldsymbol{y} \in V)$$

と置けば、$b_{j_1,\cdots,j_p}(\boldsymbol{y}) = g^*(f)(\boldsymbol{y})(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p})$ は次で与えられる：

$$\begin{aligned} b_{j_1,\cdots,j_p}(\boldsymbol{y}) &= f(g(\boldsymbol{y}))(D(g)(\boldsymbol{y})e_{j_1} \wedge \cdots \wedge D(g)(\boldsymbol{y})e_{j_p}) \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1,\cdots,i_p}(g(\boldsymbol{y})) \cdot \frac{\partial(x_{i_1},\cdots,x_{i_p})}{\partial(y_{j_1},\cdots,y_{j_p})} \end{aligned}$$

Exterior derivative

U を n-domain とする。

定義 (Exterior derivative) $d : \Lambda^p(U) \to \Lambda^{p+1}(U)$ を次で定義する。

1. $f(\boldsymbol{x}) \in \Lambda^0(U)$ に対して $df(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\, dx_i$ と定める。
2. 一般の $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} a_{i_1,\ldots,i_p}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ に対して次で定める。

$$df(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} da_{i_1,\ldots,i_p}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

定理 $d^2 = 0$

Differential form

定義 (differential form) $(X, \mathcal{D})$ を diffeological space とする。α が X 上の differential form とは次の条件を満たすことである。

1. $\forall_{(P:U\to X)\in\mathcal{D}}\ \alpha(P)\in\Lambda^p(U)$
2. $\forall_{(P:U\to X)\in\mathcal{D}}\ \forall_{F\in C^\infty(V,U)}\ \alpha(P\circ F)=F^*(\alpha(P))$

X 上の p 次の differential forms 全体を $\Omega^p(X)$ で表す。

定義 (differential form with compact support, Izumida) $(X, \mathcal{D})$ を diffeological space とする。$\alpha\in\Omega^p(X)$ が X 上の コンパクト台をもつ differential form とは次の条件を満たすコンパクト集合 $K_\alpha\subset X$ が存在することである。

1. $\forall_{P\in\mathcal{D}}\ \mathrm{Supp}(\alpha(P))\subset P^{-1}(K_\alpha)$

X 上の p 次の differential forms with compact support 全体を $\Omega^p_c(X)$ で表す。

Differential form

定義 (Exterior derivative) $(X, \mathcal{D})$ を diffeological space とする。
$d : \Omega^p(X) \to \Omega^{p+1}(X)$ を次で定義する。

1. $\forall_{\alpha \in \Omega^p(X)} \forall_{P \in \mathcal{D}}\ d(\alpha)(P) = d(\alpha(P))$

X 上の p 次の differential forms 全体を $\Omega^p(X)$ で表す。

定義 (differential form with compact support, Izumida) $(X, \mathcal{D})$ を diffeological space とする。$\alpha \in \Omega^p(X)$ が X 上の コンパクト台をもつ differential form とは次の条件を満たすコンパクト集合 $K_\alpha \subset X$ が存在することである。

1. $\forall_{P \in \mathcal{D}}\ \mathrm{Supp}(\alpha(P)) \subset P^{-1}(K_\alpha)$

X 上の p 次の differential forms with compact support 全体を $\Omega^p_c(X)$ で表す。

Partition of unity

$(X, \mathcal{D})$ を diffeological space とし、$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を、X の開被覆とする。

定義 (partition of unity, Izumida) $\{\rho_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \Omega^0(X)$ が開被覆 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に従属する 1 の分割であるとは、任意の $P \in \mathcal{D}$ に対して次が成立することである。

1. $\rho_\lambda(P) \geq 0, \quad \sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda(P) \equiv 1$
2. $\mathrm{Supp}(\rho_\lambda(P)) \subset P^{-1}(A_\lambda)$

定義 (proper partition of unity, Izumida) 開被覆 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に従属する 1 の分割 $\{\rho_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \Omega^0(X)$ に対して、次を満たす X の閉集合の族 $\{F_\lambda \subset A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在するとき、1 の分割 $\{\rho_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は proper であると呼ぶ。

$$\forall_{\lambda\in\Lambda} \forall_{P\in\mathcal{D}} \ \mathrm{Supp}(\rho_\lambda(P)) \subset P^{-1}(F_\lambda)$$

命題 (Izumida) 正規空間 X が、任意の開被覆に対して 1 の分割を持つならば、proper な 1 の分割に取り換えられる。

Application

Diffeology	—	Spaces/Maps
Construction	—	Induced diffeology/Mapping sp
de Rham theory	—	Differential form/Partition of unity
Application	—	Homotopy/Mayer-Vietoris seq

Application

Application — Homotopy/Mayer-Vietoris s

Paths

$(X, \mathcal{D})$ を diffeological space とする。

1. C^∞-map $\gamma : [0,1] \to X$ を X の path と呼び、特に $\gamma(0) = \gamma(1)$ のとき loop と呼ぶ。
2. X の path 全体を $\mathrm{Paths}(X)$ で表し、loop 全体を $\mathrm{Loops}(X)$ で表す。
3. 部分集合 $A,\ B \subset X$ に対して、
   $\mathrm{Paths}(X; A, B) = \{\gamma \in \mathrm{Paths}(X) \mid \gamma(0) \in A,\ \gamma(1) \in B\}$ とする。

定義 (連結)

1. X の二点 $x,\ x' \in X$ に対する関係 $\sim$ を次で定める。
$$x \sim x' \iff \exists_{\gamma \in \mathrm{Paths}(X)}\ \text{s.t.}\ \ \gamma(0) = x,\ \ \gamma(1) = x'$$
2. X が連結である $\iff \forall_{x, x' \in X}\ x \sim x'$

命題 このとき、$\sim$ は同値関係を与える。

定義 (連結成分) $\pi_0(X) = X/\sim$

Homotopy

$(X, \mathcal{D})$ と $(X', \mathcal{D}')$ を二つの diffeological spaces とする。

1. C^∞-map $f,\ g : X \to X'$ が homotopic とは、$C^\infty(X, X')$ の中で $f \sim g$ であることとする。
2. X と X' が homotopy equivalent とは、C^∞ maps $f : X \to X', g : X' \to X$ が存在して次を満たすことである。
$$f \circ g \sim \mathrm{id}_{X'}, \quad g \circ f \sim \mathrm{id}_X$$

命題 $* \in X$ を基点とするとき、$\pi_1(X, *) = \pi_0(\mathrm{Paths}(X; *, *))$ は群となる。これを X の基本群と呼ぶ。

Mayer-Vietoris seq

Iglesias-Zemmour と Izumida に従って次の様に定める。

de Rham cohomology

$$H^p_{DR}(X) = \frac{\mathrm{Ker}\left(d : \Omega^p(X) \to \Omega^{p+1}(X)\right)}{\mathrm{Im}\left(d : \Omega^{p-1}(X) \to \Omega^p(X)\right)}$$

de Rham cohomology with compact support

$$H^p_c(X) = \frac{\mathrm{Ker}\left(d : \Omega^p_c(X) \to \Omega^{p+1}_c(X)\right)}{\mathrm{Im}\left(d : \Omega^{p-1}_c(X) \to \Omega^p_c(X)\right)}$$

命題 (1) 多様体 M に対して、$\mathcal{D}$ を M の C^∞ 級写像となる parametrizations の全体とし、$X = (M, \mathcal{D})$ と置くと、次が成立する

1. $H^p_{DR}(M) \cong H^p_{DR}(X)$, $\quad H^p_c(M) \cong H^p_c(X)$

$(X, \mathcal{D})$ を diffeological space とし、$\mathcal{U} = \{A_0, A_1\}$ をその開被覆とする。

定理（Izumida, Haraguchi-Shimakawa） $\mathcal{U}$ に属する 1 の分割が存在するとき、次の長完全列を得る。

$$\cdots \to H^p_{DR}(X) \to H^p_{DR}(A_0) \oplus H^p_{DR}(A_1) \to H^p_{DR}(A_0 \cap A_1) \\ \to H^{p+1}_{DR}(X) \to H^{p+1}_{DR}(A_0) \oplus H^{p+1}_{DR}(A_1) \to H^{p+1}_{DR}(A_0 \cap A_1) \to \cdots$$

定理（Izumida, Haraguchi-Shimakawa） $\mathcal{U}$ に属する proper な 1 の分割が存在するとき、次の長完全列を得る。

$$\cdots \to H^p_c(A_0 \cap A_1) \to H^p_c(A_0) \oplus H^p_c(A_1) \to H^p_c(X) \\ \to H^{p+1}_c(A_0 \cap A_1) \to H^{p+1}_c(A_0) \oplus H^{p+1}_c(A_1) \to H^{p+1}_c(X) \to \cdots$$

定理（Iglesias-Zemmour）

$\eta : H^1_{DR}(X) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(X, *), \mathbb{R}) \iff \eta([\alpha]) : [\ell] \mapsto \int_\ell \alpha := \int_0^1 \alpha(\ell)$ とおく。もし X が連結ならば、η は単射である。

$(X, \mathcal{D})$ を diffeological space とし、$\mathcal{U} = \{A_0, A_1\}$ をその開被覆とする。

定理（Izumida, Haraguchi-Shimakawa） $\mathcal{U}$ に属する 1 の分割が存在するとき、次の長完全列を得る。

$$\cdots \to H^p_{DR}(X) \to H^p_{DR}(A_0) \oplus H^p_{DR}(A_1) \to H^p_{DR}(A_0 \cap A_1)$$
$$\to H^{p+1}_{DR}(X) \to H^{p+1}_{DR}(A_0) \oplus H^{p+1}_{DR}(A_1) \to H^{p+1}_{DR}(A_0 \cap A_1) \to \cdots$$

定理（Izumida, Haraguchi-Shimakawa） $\mathcal{U}$ に属する proper な 1 の分割が存在するとき、次の長完全列を得る。

$$\cdots \to H^p_c(A_0 \cap A_1) \to H^p_c(A_0) \oplus H^p_c(A_1) \to H^p_c(X)$$
$$\to H^{p+1}_c(A_0 \cap A_1) \to H^{p+1}_c(A_0) \oplus H^{p+1}_c(A_1) \to H^{p+1}_c(X) \to \cdots$$

定理（Iglesias-Zemmour）
$\eta : H^1_{DR}(X) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(X, *), \mathbb{R}) \iff \eta([\alpha]) : [\ell] \mapsto \int_\ell \alpha := \int_0^1 \alpha(\ell)$ とおく。もし X が連結ならば、η は単射である。

$(X, \mathcal{D})$ を diffeological space とし、$\mathcal{U} = \{A_0, A_1\}$ をその開被覆とする。

定理 (Izumida, Haraguchi-Shimakawa) $\mathcal{U}$ に属する 1 の分割が存在するとき、次の長完全列を得る。

$$\cdots \to H^p_{DR}(X) \to H^p_{DR}(A_0) \oplus H^p_{DR}(A_1) \to H^p_{DR}(A_0 \cap A_1)$$
$$\to H^{p+1}_{DR}(X) \to H^{p+1}_{DR}(A_0) \oplus H^{p+1}_{DR}(A_1) \to H^{p+1}_{DR}(A_0 \cap A_1) \to \cdots$$

定理 (Izumida, Haraguchi-Shimakawa) $\mathcal{U}$ に属する proper な 1 の分割が存在するとき、次の長完全列を得る。

$$\cdots \to H^p_c(A_0 \cap A_1) \to H^p_c(A_0) \oplus H^p_c(A_1) \to H^p_c(X)$$
$$\to H^{p+1}_c(A_0 \cap A_1) \to H^{p+1}_c(A_0) \oplus H^{p+1}_c(A_1) \to H^{p+1}_c(X) \to \cdots$$

定理 (Iglesias-Zemmour)

$\eta : H^1_{DR}(X) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(X, *), \mathbb{R}) \iff \eta([\alpha]) : [\ell] \mapsto \int_\ell \alpha := \int_0^1 \alpha(\ell)$ とおく。もし X が連結ならば、η は単射である。

ご静聴ありがとうございました！

References (Historical order) [Return]

[Ch1] K. T. Chen, *Iterated integrals of differential forms and loop space homology*, Ann. of Math. (2) **97** (1973), 217–246.

[Sch] R. Schön, "Acyclic Models and Excision", Proc. Amer. Math. Soc., **59** (1976), 167–168.

[Ch2] K. T. Chen, *Iterated path integrals*, Bull. Amer. Math. Soc., **83** (1977), 831–879.

[Sou] J. M. Souriau, *Groupes differentiels*, in "Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics" (Proc. Conf. Aix-en-Provence/Salamanca, 1979), Lecture Notes in Math., **836**, Springer, Berlin, 1980, 91–128.

[B-T] R. Bott and L. Tu, "Differential Forms in Algebraic Topology", Springer-Verlag GTM **82**, 1982.

[Ch3] K. T. Chen, *On differentiable spaces*, Categories in Continuum Physics, Lecture Notes in Math., **1174**, Springer, Berlin, 1986, 38–42.

[B-H] J.C. Baez and A.E. Hoffnung, *Convenient categories of smooth spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **363** (2011), 5789–5825.

[Zem] P. Iglesias-Zemmour, "Diffeology", Mathematical Surveys and Monographs, **185**, Amer. Math. Soc., New York, 2013.