一般の安定ホモトピー圏への大川の定理の拡張

加藤 諒
（高知大学医学部附属病院 次世代医療創造センター）

スペクトラムの圏 $\mathcal{S}$ において、スペクトラム E に対し $\langle E\rangle := \{X \in \mathcal{S}\colon E \wedge X = 0\}$ を E の Bousfield 類と呼ぶ。大川は、スペクトラムの Bousfield 類全体が集合をなし、さらにその濃度が $2^{\aleph_0}$ 以上かつ $2^{2^{\aleph_0}}$ 以下であることを示した [3]。本講演では、講演者が高知大学の下村克己教授と岡島宏樹氏との共同研究により、この結果の一般の安定ホモトピー圏への拡張を試みることで得られた成果を紹介する。

以下、本講演の内容の詳細を簡潔に述べる。

Hovey, Palmieri, Strickland により、スペクトラムの圏の一般化である安定ホモトピー圏という概念が定義された [2]。安定ホモトピー圏 $\mathcal{C}$ は閉対象モノイド圏 $(\mathcal{C}, \wedge, S)$ の構造を持ち（$\wedge$: monoidal product, S: unit object）、さらに零対象 0 と自己同型関手 Σ を持つ。よって、一般の安定ホモトピー圏 $\mathcal{C}$ においても、対象 E の Bousfield 類が $\mathcal{S}$ の場合と同様にして定義できる。また、安定ホモトピー圏 $\mathcal{C}$ は生成元と呼ばれる対象により構成された集合 $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ を持ち、$\mathcal{G}(\mathcal{C})$ で生成される localizing 部分圏は $\mathcal{C}$ 全体となる。$\mathcal{G}(\mathcal{C})$ の元が全て small と呼ばれる性質を持つとき、$\mathcal{C}$ は algebraic 安定ホモトピー圏と呼ばれる。thick$\langle\mathcal{G}(\mathcal{C})\rangle$ を $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ で生成される $\mathcal{C}$ の thick 部分圏とし、さらに $\mathfrak{a}$ を $\bigoplus_{F,G\in\mathrm{thick}\langle\mathcal{G}(\mathcal{C})\rangle}\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}[\Sigma^n F, G]$ の濃度とする。また、$\mathbb{DL}(\mathcal{C}) := \{\langle E\rangle \in \mathbb{B}(\mathcal{C})\colon \langle E\wedge E\rangle = \langle E\rangle\}$ とし、さらに、$\mathbb{B}(\mathcal{C})$ の部分集合 $\mathbb{A}(\mathcal{C})$ を

$$\mathbb{A}(\mathcal{C}) = \{\langle E\rangle \in \mathbb{DL}(\mathcal{C}) \setminus \{\langle 0\rangle\}\colon \langle E\wedge X\rangle = \langle E\rangle \text{ or } \langle 0\rangle \text{ for any } X \in \mathcal{C}\}$$

と定義する。$\mathfrak{b}$ は $\mathbb{A}(\mathcal{C})$ の濃度とする。

Theorem 1. *$\mathcal{C}$ を algebraic 安定ホモトピー圏とする。このとき、$\mathcal{C}$ の Bousfield 類全体 $\mathbb{B}(\mathcal{C})$ は集合をなし、その濃度は $2^{\mathfrak{b}}$ 以上かつ $2^{2^{\mathfrak{a}}}$ 以下である。*

X が thick$\langle\mathcal{G}(\mathcal{C})\rangle$ に含まれているとき、X を $\mathcal{G}$-finite な対象と呼び、$\langle E\rangle \in \mathbb{B}(\mathcal{C})$ に対し、$\mathrm{supp}(\langle E\rangle) := \{\langle A\rangle \in \mathbb{A}(\mathcal{C})\colon \langle A\wedge E\rangle \neq 0\}$ とする。任意の 0 でない環対象 $R \in \mathcal{C}$ に対し、$\mathrm{supp}(\langle R\rangle) \neq \emptyset$ が成立するとき、「$\mathbb{A}(\mathcal{C})$ detects ring objects」という。

Theorem 2. *$\mathcal{C}$ を「$\mathbb{A}(\mathcal{C})$ detects ring objects」が成立する algebraic 安定ホモトピー圏とし、X と Y は $\mathcal{G}$-finite とする。このとき、$\langle X\rangle = \langle Y\rangle$ と $\mathrm{supp}(\langle X\rangle) = \mathrm{supp}(\langle Y\rangle)$ は同値である。*

p を素数としたとき、p-local なスペクトラムの圏 $\mathcal{S}_p$ について考える。$S(\in \mathcal{S}_p)$ を p-local 球面スペクトラムとするとき、$\mathcal{G}(\mathcal{S}_p) = \{S\}$ である。S は small なので、$\mathcal{S}_p$ は algebraic 安定ホモトピー圏となり、$\mathcal{S}_p$ において $\mathfrak{a} = \aleph_0$ となる。また、n 番目の Morava K 理論 $K(n)$ と mod p Eilenberg-MacLane スペクトラム $K(\infty)$ に注目すると、 $\{\langle K(n)\rangle\colon 0 \le n \le \infty\} \subset \mathbb{A}(\mathcal{S}_p)$ が言えるため、 Theorem 1 より大川が [3] にて示した $2^{\aleph_0} \le |\mathbb{B}(\mathcal{S}_p)| \le 2^{2^{\aleph_0}}$ が得られる。

また、Hopkins と Smith の冪零定理 [1] を用いることで 「$\mathbb{A}(\mathcal{S}_p)$ detects ring objects」の成立が示される。Theorem 2 は、$\mathcal{S}_p$ において、有限スペクトラムの Bousfield 類がその type のみに依存するという事実の一般化と見なすことができる。

References

1. M. J. Hopkins and J. H. Smith, Nilpotence and stable homotopy theory II, Ann. of Math. **148** (1998), 1–49.
2. M. Hovey, J. H. Palmieri, and N. P. Strickland, Axiomatic stable homotopy theory, Mem. Amer. Math. Soc.**128/610** (1997).
3. T. Ohkawa, The injective hull of homotopy types with respect to generalized homology functors, Hiroshima Math. J. **19**(1989), 631–639.

Date: 2016/8/30.