GKM 多様体と GKM グラフ

黒木慎太郎

岡山理科大学理学部応用数学科，〒 700-0005 岡山市北区理大町 1 - 1
[kuroki@xmath.ous.ac.jp]

M^{2m} を $2m$ 次元の連結な多様体で n 次元トーラス T^n の作用を持つと仮定します。もしも T^n 作用の 0 次元軌道（不動点）と 1 次元軌道の軌道空間がグラフの形をしているとき，(M^{2m}, T^n)(簡単に M) を GKM 多様体 といい，その軌道空間から得られるグラフの辺に tangential representation の情報をラベル付けしたものを GKM グラフ といいます。

GKM 多様体は Goresky-Kottwitz-MacPherson によって [1] で定義され，GKM グラフは Guillemin-Zara によって [2] で（GKM 多様体の存在を仮定せずに）抽象的に定義され整理されました（最近では GKM 理論とか GKM method 等と呼ばれています)。GKM 多様体は大変広範なクラスで，例えば，トーリック多様体や等質空間 G/H で G と H の（G と H はコンパクトリー群）極大トーラスの次元が一致する場合等が GKM 多様体になります。また，組み合わせ論的な対象の GKM グラフを用いることで GKM 多様体の幾何的，トポロジー的な性質を証明することができます。一つの典型的な応用として，GKM 多様体に同変形式的（Borel construction の Serre スペクトル系列が E_2-term で collapse する）という条件を付けると，その同変コホモロジーがグラフの上で定義される環（グラフの同変コホモロジー）と同型になるということが知られています ([1])。この同型を通してトーラス多様体（と呼ばれるトーリック多様体の一般化）の同変コホモロジー環が GKM グラフの face ring と呼ばれる多面体の Stanley-Reisner ring を拡張したものと同型になることが証明されています ([5], トーリック多様体の同変コホモロジーは Stanley-Reisner ring と同型になる)。

本講演では，一日目は GKM 多様体と GKM グラフの導入を行いたいと思います。二日目は，GKM グラフを応用して GKM 多様体のどのような情報が引き出せるのかについて，講演者の最近の結果（主に [3]，時間があれば [4] も）をお話ししたいと思います.

References

[1] M. Goresky, R. Kottwitz and R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. Math. **131** (1998), 25–83.

[2] V. Guillemin and C. Zara, *One-skeleta, Betti numbers, and equivariant cohomology*, Duke Math. J. **107**, (2001), 283–349.

[3] S. Kuroki, *Upper bounds for the dimension of tori acting on GKM manifolds*, arXiv:1510.07216.

[4] S. Kuroki, E. Lee, J. Song and D. Y. Suh, *Flag Bott manifolds and the toric closure of a generic orbit associated to a generalized Bott manifold*, arXiv:1708.02082.

[5] M. Masuda, T. Panov, *On the cohomology of torus manifolds*, Osaka J. Math. **43** (2006), 711–746.