素数分布とトポロジー

野口和範 (工学院大学 学習支援センター)*

与えられた実数 x 以下の素数の個数を $\pi(x)$ とした時, $\pi(x)$ の $x \to \infty$ の時の増大を調べることは素数分布論の中心的問題です。素数定理により、x が十分大きいとき $\pi(x)$ は $x/\log x$ とほぼ同じくらいであることがわかっています。

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

残った問題は 2 つの関数の誤差項がどの程度の大きさか評価することですが、今現在最良の評価は予想される大きさよりはるかに大きく、またその改善も全く進んでいないというのがこの分野の現状です。有名なリーマン予想はこの誤差項の最良評価を与えることと直接的にかかわっています。

Björner は素数定理とリーマン予想がトポロジーの以下の命題と同値であることを示しました [1]。squarefree（平方因子のない）な自然数 k に対し、$P(k)$ を k の素因子の集合とします。単体複体 Δ_n を

$$\Delta_n = \{P(k) \mid 1 \leq k \leq n, k : \text{squarefree}\}$$

とした時、以下の同値が成り立つことが示されました。

$$\text{素数定理} \Leftrightarrow \chi(\Delta_n) = o(n)$$

$$\text{リーマン予想} \Leftrightarrow \chi(\Delta_n) = O(n^{1/2+\varepsilon})$$

つまり単体複体の列 $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ から得られるオイラー標数の列 $(\chi(\Delta_n))_{n\geq 1}$ の大きさを n の関数で上から評価することと $\pi(x)$ の性質が密接にかかわっているということです。

Björner は [1] において、Δ_n のホモロジーを調べましたが、結果、Δ_n のホモトピー型は球面のウェッジ和であることが分かったため、Δ_n のホモロジーは情報をほとんど持たないことがわかりました。この論文ではホモロジーではない別の不変量が必要であろうということで結論付けられています。

私の今の研究はこの Björner の仕事の続きを調べることです。今までの成果はおよそ [2] にまとまっています。研究が進んだところまでお話しするつもりです。

References

[1] A. Björner. A cell complex in number theory. *Advances in Applied Math.*, 46: 71–85, 2011.

[2] K. Noguchi. Zeros of the zeta series of a poset and iterated barycentric subdivision. arXiv:1603.08562.

*noguchi@cc.kogakuin.ac.jp