E 弦理論と Nekrasov 型公式

酒井一博

（京都大学基礎物理学研究所）

与えられた場の量子論の性質を知る上で大きな手がかりとなるものに、分配関数がある。分配関数は、理論に現れる状態のスペクトルの重複度を数え上げる関数である。4 次元の場の量子論においては、通常は量子論的に厳密な分配関数を計算することは困難である。しかしながら超対称性を持つ 4 次元場の量子論については、しばしば厳密な分配関数の計算が可能である。特に $\mathcal{N}=2$ の超対称性を持つ理論については、BPS 状態（超対称性を部分的に保つ状態）の分配関数の具体形に関する研究が盛んに行われている。代表的な例である 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称 SU(N) ゲージ理論の場合、BPS 分配関数は本質的に Nekrasov 分配関数として知られるコンパクトな表式によって与えられることが知られている。Nekrasov 分配関数には幾つもの全く異なる数理物理的解釈があり、この 10 年大変活発に研究されている。

一方、近年弦理論の分野では 6 次元の非自明な場の量子論が脚光を浴びている。これらの理論は通常の Lorentz 不変なラグランジアンから出発する定式化では見えてこないが、弦理論の無矛盾性からその存在が予言されている。そのひとつの例である E 弦理論は、6 次元で最小の超対称性を持つもので最も構成の単純な場の理論である。

6 次元 E 弦理論の空間 2 次元分を T^2 にコンパクト化すると、低エネルギーでは 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称場の理論とみなすことができ、自然な BPS 状態の分配関数がひとつ定義される。弦理論の双対性の議論から、このときの BPS 分配関数は $\frac{1}{2}$K3 曲面の標準束の全体空間のなす Calabi–Yau 多様体内の正則曲線の数え上げ母関数になっていることが分かっている。この E 弦理論の BPS 分配関数は、通常の 4 次元 $\mathcal{N}=2$ ゲージ理論のそれと共通の性質を持ちながら、E_8 型アフィン Lie 代数の構造やモジュラー変換性などの新たな要素をも含んでおり、数理物理学的な観点から大変興味深い研究対象である。

通常の 4 次元 $\mathcal{N}=2$ ゲージ理論の場合とは異なり、E 弦理論の BPS 分配関数を閉じた形で導出する一般的な枠組みや処方箋は今のところ知られていない。対称性を利用して E 弦理論の BPS 分配関数を級数展開の形で求める試みがこれまで行われてきたが、最近我々は Nekrasov 分配関数によく似た、E 弦理論の BPS 分配関数を陽に与えるコンパクトな表式を見いだした。この表式は実験から得たもので厳密な導出はないものの、既存の方法で計算される級数展開を十分高次まで正しく再現し、また期待される対称性を確かに持つことが確かめられている。本講演ではこの結果について、関連する話題に触れながら紹介したい。

(e-Print: arXiv:1203.2921, 1207.5739 [hep-th])