導来ストリングトポロジー

―分類空間の 2 次元開閉位相的場の理論へ―

栗林 勝彦

信州大学

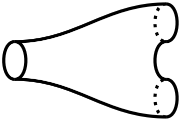
日本数学会 2021 年会 2021 年 3 月 15 日
於　慶應義塾大学矢上キャンパス，オンライン配信

Chas–Sullivan から様々なストリングトポロジー –歴史概観–

- Chas–Sullivan [CS] (1999)：向き付け可能閉多様体 M に対して，自由ループ空間 $LM := \mathrm{map}(S^1, M)$ のホモロジー (ループホモロジー) 上にループ積が定義される．

$$\mathrm{lp} : H_*(LM) \otimes H_*(LM) \to H_{*-\dim M}(LM)$$

- Cohen–Jones [CJ] (2002)：ループ積 lp のホモトピー論的解釈
- Cohen–Godin [CG] (2004)：向き付け可能閉多様体のストリングトポロジーに付随する位相的場の理論 (TQFT)

lp = コボルディズム  の TQFT 作用素

- Félix–Thomas [FT] (2009)：(多様体の一般化である) Gorenstein 空間のストリングトポロジー . . . 導来ストリングトポロジー

- Chataur–Menichi [CM] (2012) : Lie 群の分類空間のストリングトポロジーと付随するホモロジー的共形場理論 (HCFT)(TQFT を含む) ...

Table: (1) ストリングトポロジー ($\mathcal{ST}$) の研究対象とその構造

\\... の $\mathcal{ST}$ 付加構造 \\	向付け可能 閉多様体	Lie 群の 分類空間	スタック (軌道体を含む)	Gorenstein 空間
ループ (余) 積	[CS] ('99) [CJ] ('02)	[CM] ('12)	[BGNX] ('12) Behrend,	[FT] ('09) [KMN]
位相的場の理論 開閉理論	[CG] ('04) [Tam] ('10) [BCT] ('09)	[Gu]('11) [K20a]	Ginot, Noohi, Xu [LUX] ('08)	??
BV 代数構造 HCFT	[M09b][H](Lie 群) [Go] ('08)	[KM] ('19) [HL] ('15)	[A] ('18) 軌道体関連	??
de Rham, 有理ホモトピー論	[Ir] ('18) [FT] ('09)	[KM] ('19)	ディフェオロジー適用 ??	[FT] [Na] ('15) [Wa1] ('16)
計算ツールの開発	[CJY] ('04)	[KM] ('19)	[CN] ('16)	[KMN] ('15)
導来圏での考察 Hochschild cohomology	[BCT] ('09) [M09a] [K11]	[K16]	??	[KMN] ('15)

- map(S^n, M) (Brane topology [Sullivan–Voronov][Wa2])
- map(Σ_g, M) (Surface products [GTZ Ginot–Tradler–Zeinalian])

Cohen–Jones ('02) によるループ積の構成方法：
M：向き付けられた d 次元閉多様体，次の図式 (1) を考える．

$$\begin{tikzcd} LM \arrow[d, "ev_0"'] & LM \times_M LM \arrow[l, "\mathsf{Comp}"'] \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\rho"'] & LM \times LM \arrow[d, "\mathbf{ev_0} \times \mathbf{ev_0}"] \\ M \arrow[r, equal] & M \arrow[r, "\Delta"'] & M \times M \end{tikzcd}$$

右側の図式はプルバックであり，Comp はループの結合を表す写像である．

対角写像 $\Delta : M \to M \times M$，閉環状近傍 $i : M \xrightarrow{i} \mathrm{Tub} \to M \times M$ とレトラクション $r : \mathrm{Tub} \to M$ を考える．交叉積 $\Delta_!$ が次の合成で定義される：

$$H_*(M \times M) \xrightarrow{j_*} H_*(M^{\times 2}, M^{\times 2} \setminus \mathrm{Tub}^\circ) \xleftarrow{\cong} H_*(\mathrm{Tub}, \partial\mathrm{Tub}) \xrightarrow{\tau \cap -} H_{*-d}(\mathrm{Tub}) \xrightarrow{r_*} H_{*-d}(M)$$

評価写像 $\mathbf{ev_0}$ で持ち上げて $\widetilde{\Delta_!} : H_*(LM \times LM) \to H_{*-d}(LM \times_M LM)$ を考えることができる．こうしてループ積が定義される：

$$\mathbf{lp} := \mathbf{Comp}_* \circ \widetilde{\Delta_!} : H_*(LM) \otimes H_*(LM) \to H_{*-d}(LM)$$

定理 2.1 (Chas–Sullivan ('99), Cohen–Jones ('02))

M を向き付けられた d 次元閉多様体，$\mathbb{H}_*(LM) := H_{*+d}(LM)$ と定義する．さらに，$\bullet : H_*(LM) \otimes H_*(LM) \to H_*(LM)$ を

$$a \bullet b = (-1)^{d(\deg a + d)} \mathrm{lp}(a \otimes b)$$

と定義する．このとき $(\mathbb{H}_*(LM), \bullet)$ は次数付き可換，結合的かつ単位元 $s_*([M])$ を持つ単位的代数である．ここで $s : M \to LM$ は定値ループを対応させる ev_0 の切断で，$[M]$ は M の向きである．

定理 2.2 (Cohen–Jones–Yan ('04))

次数付き代数として次の同型が成立する:

$$\mathbb{H}_*(LS^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \wedge(a) \otimes \mathbb{Z}[u], & n \geq 3 \text{ は奇数}, \\ \wedge(b) \otimes \mathbb{Z}[a, v]/(a^2, ab, 2av), & n \geq 2 \text{ は偶数}. \end{cases}$$

ここで，$|a| = -n$，$|u| = n - 1$，$|b| = -1$，$|v| = 2n - 2$ である．

定義 2.3 (FHT Félix–Halperin–Thomas, 1988)

次の性質を持つ連結空間 M を d 次元 $\mathbb{K}$-**Gorenstein** 空間という:

$$\dim \mathrm{Ext}^*_{C^*(M)}(\mathbb{K}, C^*(M)) = \begin{cases} 0 & \text{if } * \neq d \\ 1 & \text{if } * = d. \end{cases}$$

ここで，$C^*(-) := C^*(-;\mathbb{K})$ は体 $\mathbb{K}$ 係数特異コチェイン複体関手である.

Gorenstein 空間, (次元) の例

- 向き付けられた d 次元閉多様体 M, (d 次元)
- 連結 Lie 群 G の分類空間 BG, ($-\dim G$ 次元)
- 連結 Lie 群 G 作用を持つ閉多様体 M から得られる Borel 構成 $EG \times_G M$, ($\dim M - \dim G$ 次元)

L. Avramov and S. Halperin, Through the looking glass: A dictionary between rational homotopy theory and local algebra, Algebraic Topology and their Interactions, 3–27, LNM, vol 1183, Springer, 1986.

補題 2.4

M を d 次元連結 *Poincaré* 双対空間とする．$f: N \to M$ を連結空間からの写像とするこのとき，同型 $\mathrm{Ext}^*_{C^*(M)}(C^*(N), C^*(M)) \cong H^{d-*}(N)$ が成り立つ．

実際，半自由分解 $\mathcal{F} \xrightarrow{\simeq} C^*(N)$ を用いて，次の同型の列を得る．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ext}^n_{C^*(M)}(C^*(N), C^*(M)) \\
= \;& H^n(\mathrm{Hom}_{C^*(M)}(\mathcal{F}, C^*(M))) \cong H^n(\mathrm{Hom}_{C^*(M)}(\mathcal{F}, C_*(M)^\vee)) \\
\cong \;& H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{F} \otimes_{C_*(M)} C_*(M), \mathbb{K})) \overset{P.D.}{\cong} H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{F} \otimes_{C^*(M)} s^d C^*(M), \mathbb{K})) \\
= \;& \mathrm{Tor}^{-n}_{C^*(M)}(C^*(N), s^d C^*(M))^\vee = \mathrm{Tor}^{-n+d}_{C^*(M)}(C^*(N), C^*(M))^\vee \\
\cong \;& H^{d-n}(N)^\vee.
\end{aligned}
$$

ここで，$s^d C^*(M)$ は次数シフト，$(s^d C^*(M))^k := C^{d+k}(M)$ である．

定理 2.5 (Félix–Thomas)

M を d 次元単連結 $\mathbb{K}$-*Gorenstein* 空間で $\mathbb{K}$ 係数コホモロジーが有限型であるとする．このとき $\mathrm{Ext}^*_{C^*(M^n)}(C^*(M), C^*(M^n)) \cong H^{*-(n-1)d}(M)$ が成り立つ．ここで，$C^*(M)$ は対角写像 $\Delta: M \to M^n$ により $C^*(M^n)$-加群と考えている．

定理 2.6

M を $\mathbb{K}$ 係数コホモロジーが有限型である単連結 *Gorenstein* 空間とする．導来圏 $\mathcal{D}(\text{Mod-}C^*(M^n))$ 上 $\mathrm{Ext}^{(n-1)d}_{C^*(M^n)}(C^*(M), C^*(M^n)) \cong H^0(M)$ の生成元に対応する射 $\Delta^! : C^*(M) \to C^{*-(n-1)d}(M^n)$ を選ぶ．このとき，p をファイブレーションとする引き戻し図式

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r, "\Delta"'] & M^n, \end{tikzcd}$$

に対して，$\mathrm{Ext}^{(n-1)d}_{C^*(E)}(C^*(E'), C^*(E))$ の元であり，$\mathcal{D}(\text{Mod-}C^*(M^n))$ 上で次の図式を可換にする射 $g^!$ が一意に存在する．

$$\begin{tikzcd} C^*(E') \arrow[r, "g^!"] & C^*(E) \\ C^*(M) \arrow[r, "\Delta^!"'] \arrow[u, "(p')^*"] & C^*(M^n). \arrow[u, "p^*"'] \end{tikzcd}$$

この定理に現れる射 $g^!$ を **Gysin** 写像 (shriek 写像) と呼ぶ．

図式 (1) に上述の定理 2.6 を ($n=2$ の時に) 適用して導来圏 $\mathcal{D}(\text{Mod-}C^*(M^2))$ 内の図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
C^*(LM) \arrow[r, "Comp^*"] & C^*(LM \times_M LM) \arrow[r, "q^!"] & C^*(LM \times LM) \\
C^*(M) \arrow[u, "ev_0^*"] \arrow[r, equal] & C^*(M) \arrow[u, "\rho^*"] \arrow[r, "\Delta^!"'] & C^*(M \times M), \arrow[u, "(ev_0 \times ev_0)^*"']
\end{tikzcd}$$

上段の写像の合成として次数 d の双対ループ積と呼ばれる写像

$$\mathsf{Dlp} : C^*(LM) \to C^*(LM \times LM)$$

が定義される．これより，

- M が単連結閉多様体である場合，ループ積 lp の定義における (交叉積の持ち上げ) $\widetilde{\Delta_!}$ の双対は，定理 2.6 の写像の一意性から交叉積の双対 $\Delta^!$ の $\mathcal{D}(\text{Mod-}C^*(M^2))$ 上の持ち上げとなる．
- Dlp の双対は，Cohen–Jones による多様体 M 上の「本来」のループ積 lp を誘導する：

$$\mathsf{lp} = H(Dlp^\vee) : H_*(LM \times LM) \to H_{*-\dim M}(LM)$$

Chataur–Menichi による分類空間のストリングトポロジー –枠組み–

Chataur–Menichi [C-M] (2012) はコンパクト連結 Lie 群 G の分類空間 BG のループコホモロジー $\mathbb{H}^*(LBG;\mathbb{K}) := H^{*+\dim G}(LBG;\mathbb{K})$ 上でホモロジー的共形場理論 (HCFT) が展開できることを示した．すなわち，

$$BD(p,q) := \coprod_{\Sigma_{g,p+q}, g\geq 0} B\mathrm{Diff}^+(\Sigma_{g,p+q},\partial)$$

のホモロジー $H_*(BD(p,q))$ による $\mathbb{H}^*(LBG;\mathbb{K})$ 上の "プロップ" 作用を与えた．したがって，

- Dehn ツイストに同伴する $H_1(BD(p,q))$ の作用から $\mathbb{H}^*(LBG;\mathbb{K})$ は Batalin–Vilkovisky 代数構造をもつ．
- $H_0(BD(p,q))$ に制限することで BG のループコホモロジーは $1+1$ 次元 TQFT 構造を持つ．特に，ペア・オブ・パンツ・コボルディズム $\Sigma_{0,2+1}$(または $\Sigma_{0,1+2}$) から得られる体係数ホモロジー上のループ積 (またはループ余積) をもつ．

Guldberg による分類空間のラベル付けられた 2 次元開閉 TQFT

Chataur–Menichi による分類空間のストリングトポロジーは， Guldberg [Gu] (2011) によりラベル付きの 2 次元開閉位相的場の理論に拡張された．

主張 4.1 ([K20a])

Lie 群の分類空間のラベル付けられた 2 次元開閉 *TQFT* における口笛作用素 *(whistle cobordism operation)* は一般に非自明である．

$\boldsymbol{W}$: the whistle cobordism

ラベル付けられた 2 次元開閉 TQFT [MS, LP]

集合 S によりラベル付けられた 2 次元開閉 TQFT$\mathbf{oc\text{-}cob}(S)$ を次のように定義：

対象 $Y = \coprod^{\text{finite}} S^1 \amalg \coprod^{\text{finite}}_{K,H} I^K_H$, ただし I^K_H は $H, K \in S$ により 0, 1 でそれぞれラベル付けられた $I = [0, 1]$ である．

射 対象 Y_0 から Y_1 への 2-次元のコボルディズム (の類)，すなわち 2-次元向きずけられた多様体 Σ であり境界

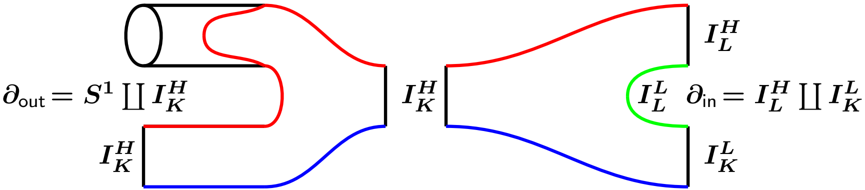
$$\partial\Sigma = \partial_{\text{in}} \cup \partial_{\text{out}} \cup \partial_{\text{free}}\Sigma$$

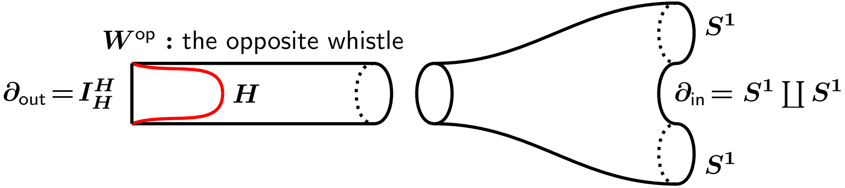
を持つ．ただし $Y_0 = \partial_{\text{in}}$, $Y_1 = \partial_{\text{out}}$ である．さらに $\partial_{\text{free}}\Sigma$ は ∂Y_0 と ∂Y_1 の間の 1-次元コボルディズムであり，∂Y_0 と ∂Y_1 のラベルと両立するように S の元でラベル付けられている．

$$\Sigma = (\Sigma, \{\Sigma^H\}_{H\in S}),\ \partial_{\text{free}}\Sigma = \coprod_{H\in S} \Sigma^H,$$

合成 はラベルを保つようなコボルディズムの接着である．

例 ーコボルディズムの合成ー





定義 4.2

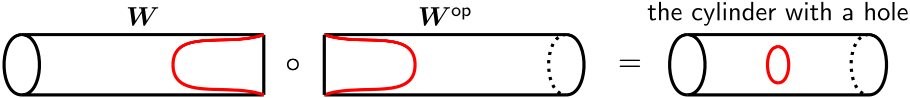
ラベル付けられた 2 次元開閉位相的場の理論 (開閉 TQFT) とはモノイダル関手

$$\mu : (\textbf{oc-cob}(S), \coprod) \to (\mathbb{K}\text{-}\textbf{Vect}, \otimes)$$

のことである. ただし $\coprod$ はコボルディズムの位相和作用である.

$$\mu_{\Sigma_1 \circ \Sigma_2} = \mu_{\Sigma_1} \circ \mu_{\Sigma_2}.$$

$$\mu_{\Sigma_1 \coprod \Sigma_2} = \mu_{\Sigma_1} \otimes \mu_{\Sigma_2}.$$



$$\mu_{(\text{the cylinder with a hole})} = \mu_{W \circ W^{\text{op}}} = \mu_W \circ \mu_{W^{\text{op}}}$$

Guldberg による分類空間のラベル付き開閉 TQFT

設定:

- G : 連結，コンパクト Lie 群，BG : G の分類空間
- $\mathcal{B}$: G の連結閉部分群からなる適切な集合.
- $\boldsymbol{\Sigma} := (\Sigma, \{\Sigma^H\}_{H\in\mathcal{B}})$: 2 次元ラベル付きコボルディズムでインバウンダリー ∂_{in} とアウトバウンダリー ∂_{out} を持つ.

次のプルバック図式で $\mathcal{M}(\boldsymbol{\Sigma})$ を定義する :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(\boldsymbol{\Sigma}) \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathrm{map}(\Sigma, BG) \arrow[d, "i^*"] \\
\prod_H \mathrm{map}(\Sigma^H, BH) \arrow[rr, "B\iota_*"'] & & \prod_H \mathrm{map}(\Sigma^H, BG),
\end{tikzcd}$$

ただし, $\iota : H \to G$ は包含写像で $i : \coprod_H \Sigma^H = \partial_{\mathrm{free}}\Sigma \to \Sigma$ はうめ込みである. $\mathcal{M}(\boldsymbol{\Sigma})$ を以下 $\boldsymbol{\Sigma}$ の $\mathcal{M}$-構成という.

$\boldsymbol{M}$-は関手的であることに注意する．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(\Sigma) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{map}(\Sigma, BG) \arrow[d, "i^*"] \\
\prod_H \mathrm{map}(\Sigma^H, BH) \arrow[r, "B\iota_*"'] & \prod_H \mathrm{map}(\Sigma^H, BG).
\end{tikzcd}$$

その関手性を用いて，うめ込み $\partial_{\mathrm{in}} \xrightarrow[in]{} \Sigma \xleftarrow[out]{} \partial_{\mathrm{out}}$ から系列

(*) $\mathcal{M}(\partial_{\mathrm{in}}) \xleftarrow{in^*} \mathcal{M}(\Sigma) \xrightarrow{out^*} \mathcal{M}(\partial_{\mathrm{out}})$ を得る．

注意 4.3

系列 (*) 上の写像 in^* はファイブレーションでありそのファイバーは H, G/K や $L \to E \to G/L$ タイプのファイフレーションの全空間の積で与えられる．ただし, $K, L, H \in \mathcal{B}$. さらに，$\pi_1(\mathcal{M}(\partial_{\mathrm{in}}))$ の $H_*(Fibre)$ への作用は自明である．したがって，ファイバー積分 $(in^*)!$ を用いて

$$\mu_\Sigma : H_*(\mathcal{M}(\partial_{\mathrm{in}})) \xrightarrow{(in^*)!} H_*(\mathcal{M}(\Sigma)) \xrightarrow{(out^*)_*} H_*(\mathcal{M}(\partial_{\mathrm{out}}))$$

が定義される．ただし，$H_*(\ \ )$ は $\mathbb{K}$-係数のコホモロジーである．

定理 4.4 (Guldberg (2011))

ラベル付けられたコボルデズム $\boldsymbol{\Sigma}$ から得られる作用素 $\{\mu_{\boldsymbol{\Sigma}}\}_{\{\boldsymbol{\Sigma}\}}$ は *Lie* 群 G の分類空間の $\mathbf{2}$-次元ラベルつき開閉 *TQFT* を与える.

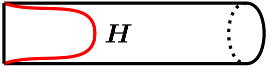
分類空間の開閉 TQFT における作用素は非自明?

注意 4.5 (玉乃井 Tam 2010)

多様体 M のストリングトポロジーにおいて, ジーナス $\mathbf{1}$ 以上の境界つき局面に対する $H_*(LM)$ 上のコボルデズム作用素は自明である.

“開理論” と “閉理論” をつなぐ口笛コボルディズム W とその反対 W^{op} に対する作用素の (非) 自明性を考察する.

W

$H^H_H = \partial_{\mathrm{in}}$ 

$\partial_{\mathrm{out}} = S^1$

$$\mu_W := (out)^* \circ (in^*)_! : H_*(\mathcal{M}(I^H_H)) \to H_{*+\dim H}(LBG)$$

$$\mu_{W^{\mathrm{op}}} := (in)^* \circ (out^*)_! : H_*(LBG) \to H_{*+\dim G/H}(\mathcal{M}(I^H_H))$$

口笛コボルディズム作用素の非自明性

定理 5.1 (K20a)

G をコンパクト連結 *Lie* 群，H を連結閉かつ最大階数部分群とし，G と H の整係数ホモロジーは p-トージョンを持たないとする．ただし p は体 $\mathbb{K}$ の標数である．このとき，口笛コボルディズム $W = (W, \{W^H\})$ 及び逆向き口笛コボルディズム $(W^{op}, \{(W^{op})^H\})$ に同伴する作用素 μ_W と $\mu_{W^{op}}$ は非自明である．さらに，$(\deg(B\iota)^*(x_i), p) = 1$ $(i = 1, ..., l)$ が成り立つとき，合成作用素

$$\mu_W \circ \mu_{W^{op}} = \mu_{W \circ W^{op}}$$

も非自明である．ただし，$B\iota : BH \to BG$ は包含写像 $\iota : H \to G$ が誘導する分類空間の間の写像であり，$x_1, ..., x_l$ は $H^*(BG; \mathbb{K})$ の生成元である．

証明の概略 (μ_W の非自明性)

- $H^*(BG) \cong \mathbb{K}[x_1, \dots, x_l]$, $H^*(BH) \cong \mathbb{K}[u_1, \dots, u_l]$ と表記すると, (プルバックのコホモロジーを計算する) Eilenberg–Moore スペクトル系列 (EMSS) を適用して次の可換図式をえる.

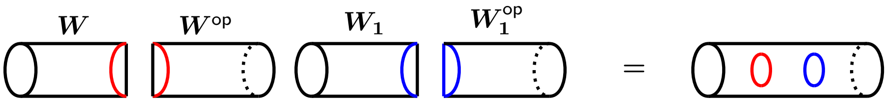
$$
\begin{tikzcd}
H^*(\mathcal{M}(\partial_{\mathrm{out}})) \cong H^*(LBG) \arrow[d, "(out^*)^*"] \arrow[dd, bend right=60, "D\mu_W"'] & H^*(BG) \otimes \wedge(y_1, \dots, y_l) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "(B\iota)^* \otimes 1"] \\
H^*(\mathcal{M}(\Sigma)) \arrow[d, dotted, bend right, "(in^*)^!"'] & H^*(BH) \otimes \wedge(y_1, \dots, y_l) \arrow[l, "\cong"'] \\
H^*(\mathcal{M}(\partial_{\mathrm{in}})) \arrow[u, "(in^*)^*"'] & \dfrac{H^*(BH) \otimes H^*(BH)}{((B\iota)^* x_i \otimes 1 - 1 \otimes (B\iota)^* x_i)} \arrow[l, "\cong"'] \arrow[u, "\mathfrak{m}"']
\end{tikzcd},
$$

ただし $\deg y_i = \deg x_i - 1$.

- ファイバー積分 $(in^*)^!$ をファイブレーション $H \to \mathcal{M}(\Sigma) \xrightarrow{in^*} \mathcal{M}(\partial_{\mathrm{in}})$ に同伴する Leray–Serre スペクトル系列 (LSSS) を用いて計算する. ただし, 計算においては EMSS から得られる生成元を LSSS の表示に書き換える必要がある.

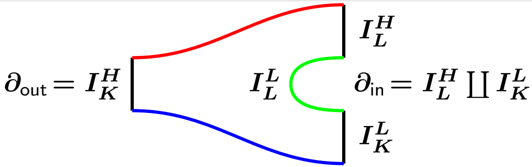
注意 5.2

コボルディズム作用素 $\mu_{(W\circ W^{\mathrm{op}})}$ は一般には非自明であるが，自由境界のラベルが W のそれと必ずしも一致しない口笛 W_1 に対して，$\mu_{(W^{\mathrm{op}}\circ W_1)} \equiv 0$ となる．結果として，コボルディズム作用素 $\mu_{(\text{2 つの穴を持つシリンダー})}$ は自明である．



定理 5.3 (開 TQFT 構造)

Υ をラベル付けられた 2 つのインターバル I_L^H と I_K^L からラベル付けられた一つのインターバル I_K^H へのコボルディズムとする (下記の図参照)．定理 *5.1* の前半の仮定のもと，コボルディズム作用素 μ_Υ は自明であるが，$\mu_{\Upsilon^{op}}$ は一般には非自明である．実際，$\mu_{\Upsilon^{op}}$ は単射である．



定理 6.1 (KM (2019))

体 $\mathbb{K}$ 係数コホモロジー $H^*(BG;\mathbb{K})$ が多項式環ならば，$H^*(LBG;\mathbb{K})$ 上の双対ループ積は自明，双対ループ余積は全射である．

開閉 TQFT コボルデズムの生成元 ([LP] Lauda–Pfeiffer) と上の [KM] における分類空間の閉 TQFT の結果，今までの口笛コボルデズム作用素の計算方法を合わせて次の結果を得る．
(有理係数の場合)

- $\mathcal{B}$ を G の最大階数の連結閉部分群からなる集合とする．このとき，$\mathcal{B}$ によりラベル付けられた開閉 TQFT の双対作用素

$$\mu : (\textbf{oc-Cobor}(\mathcal{B}), \coprod) \to (\mathbb{Q}\textbf{-Vect}, \otimes)$$

は，等質空間のコホモロジーの環構造 (生成元とイデアルの生成元) から non-zero スカラー倍を除いて具体的に計算可能である．

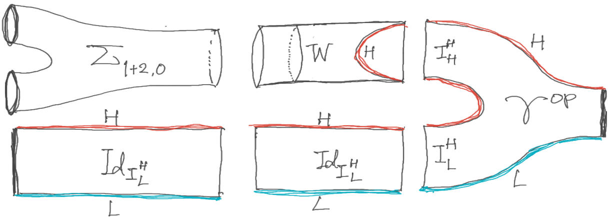
(一般体係数の場合)

- ([KM]) における BV 作用素の計算から次の合成は一般には非自明

$$(\text{Batalin–Vilkovisky 作用素}) \circ \mu_W$$

- 閉 TQFT と開 TQFT は一般に分離しない！
- $G = U(m+1)$, $H = U(m) \times U(1)$

$$\Sigma_{\mathrm{OC}} := (\Sigma_{1+2,0} \coprod Id_{I_L^H}) \circ (W \coprod Id_{I_L^H}) \circ \Upsilon^{\mathrm{op}}$$

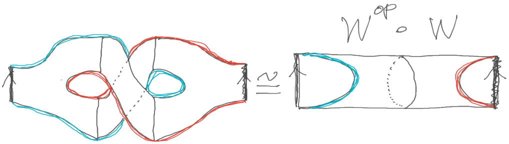


命題 6.2

L を任意の G の連結閉部分群とする．L のコホモロジーが多項式環ならば，コボルディズム作用素 $\mu_{\Sigma_{\mathrm{OC}}}$ は単射である．

(今後の展開：開閉 TQFT について)

- 一般のラベル付き開閉 TQFT のにおける計算方法の確立
- コボルディズム関係式 (Cardy 等式など) の考察



(今後の展開：ディフェオロジーとスタックのストリングトポロジー (具体的計算がほとんどない)) Table (1)

D. M. Roberts and R. F. Vozzo, Smooth loop stacks of differentiable stacks and gerbes, (2018)
$\cdots\cdots\cdots$ "diffeological groupoids"

- "ディフェオロジカル空間" の圏 **Diff** は多様体の圏がうめ込まれるカルテシアン閉圏となる． 写像空間もストレスなく自然に考えることができる．
- ディフェオロジーにおける特異 de Rham 複体関手 (de Rham の定理が成立する [K20b]) を用いて **Diff** 上の (非単連結) 有理ホモトピー論の枠組みを整備．
- Chen の反復積分, Sullivan (有理) モデルを利用して **Diff** 上でストリングトポロジーを展開することで具体的な計算が可能なのでは．