Lie 群の分類空間のループコホモロジーにおける
双対ループ余積

栗林 勝彦　(信州大学)[*1]
Luc Menichi　(Angers University)[*2]

1. Lie 群の分類空間のストリングトポロジー

位相空間 X に対して, $LX := map(S^1, X)$ をコンパクト開位相を持つ自由ループ空間とする。Chas, Sullivan [1] により創始されたストリングトポロジーは, 向き付け可能閉多様体 M に対して, その自由ループ空間のホモロジー $H_*(LM)$ 上に豊かな代数構造を与えてきた。それらの概念は Félix, Thomas [3] により多様体を含むゴレンシュタイン空間の枠組みまで一般化され, ストリングトポロジーに現れる構造は, 適切な空間のコチェイン複体上の導来圏の言葉で書き換えられつつある ([6, 7])。また Chataur, Menichi [2] は Lie 群 G の分類空間 BG のループコホモロジー $\mathbb{H}^*(LBG; \mathbb{K}) := H^{*+\dim G}(LBG; \mathbb{K})$ 上でホモロジー的共形場理論 (したがって $1+1$ 次元位相的場の理論 (TQFT)) が展開出来ることを示した。TQFT における重要なストリング作用素として, ペア-オブ-パンツ・コボルディズム $\Sigma_{0,2+1}$ (または $\Sigma_{0,1+2}$) から得られる体係数ホモロジー上のループ積 (またはループ余積) がある。本講演では, $\mathbb{H}^*(LBG; \mathbb{K})$ の**双対ループ (余) 積**に関する一般論と具体的計算についての結果を報告したい。

X を d 次元 $\mathbb{K}$-ゴレンシュタイン空間 X とする。すなわち, X は $\dim \mathrm{Ext}^d_{C^*(X)}(\mathbb{K}, C^*(X)) = 1$ であり, $* \neq d$ ならば $\dim \mathrm{Ext}^*_{C^*(X)}(\mathbb{K}, C^*(X)) = 0$ をみたす単連結空間である, ただし, $C^*(-) := C^*(-; \mathbb{K})$ は体 $\mathbb{K}$ 係数特異コチェイン複体関手を意味する。双対ループ余積の定義を思い出す。まず, レトラクト $r : \Sigma_{0,1+2} \overset{\approx}{\twoheadrightarrow} S^1 \vee S^1$ を使って得られる次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd} LX & map(\Sigma_{0,1+2}, X) \arrow[l, "map(in,X)"'] \arrow[r, "map(out,X)"] & LX^{\times 2} \\ & LX \times_X LX, \arrow[ul, "Comp"] \arrow[u, "\approx"', "map(r,X)"] \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

ここで $Comp$ はループの結合写像であり, q は包含写像を表している。このとき $Comp$ の shriek 写像 (X がゴレンシュタイン空間なので定義できる) を使って, 双対ループ余積 $Dlcop$ が合成

$$Dlcop := Comp^! \circ H^*(q) : H^{p-d}(LM) \otimes H^{q-d}(LM) \to H^{p+q-2d}(LM \times_M LM) \to H^{p+q-d}(LM)$$

により定義される。双対ループ積は同様に q の shriek 写像を用いて定義される。向き付け可能閉多様体の場合は双対ループ (余) 積の双対が Chas-Sullivan のループ (余) 積とそれぞれ一致する ([3, Theorem A])。また連結 Lie 群 G の分類空間は $-\dim G$ 次元のゴレンシュタイン空間であるから上述のようにループ (余) 積が定義される。

定理 1.1 ([5]) BG を連結 Lie 群 G の分類空間とする。このとき体 $\mathbb{K}$ 係数コホモロジー $H^*(BG; \mathbb{K})$ が多項式環ならば, $H^*(LBG; \mathbb{K})$ 上の双対ループ積は自明, 双対ループ余積は全射である。

2. Lie 群の分類空間のループ余積 -具体的計算-

定理 1.1 で見るように, 私たちは双対ループ余積に興味がある。ここではコホモロジー $H^*(BG; \mathbb{K})$ は多項式環 $\mathbb{K}[v_1, ..., v_N]$ と同型であるとする。さらに次の条件 (H) を考える。

(H) :　$\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2$ であり $Sq_1 \equiv 0$ であるか, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ または $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p$, p は奇素数

本研究は科研費 (課題番号:25287008) の助成を受けたものである。
キーワード：ゴレンシュタイン空間, ストリングトポロジー, ループ (余) 積, 分類空間, 加群微分子
[*1] 〒390-8621 長野県松本市旭 3-1-1 信州大学 学術研究院 理学系 数理・自然情報科学領域
e-mail: kuri@math.shinshu-u.ac.jp
[*2] e-mail: luc.menichi@univ-angers.fr

ただし, $Sq_1 : H^*(BG;\mathbb{Z}/2) \to H^*(BG;\mathbb{Z}/2)$ は, $Sq_1(x) = Sq^{\deg x-1}x$ により定義される作用素である。このとき, 次数付き代数として次の同型が成り立つ：

$$H^*(LBG;\mathbb{Z}/p) \cong \wedge(sv_1, ..., sv_N) \otimes \mathbb{K}[v_1, ..., v_N]$$

例えば [4, Theorem 1.2] の証明参照。分類空間の双対ループ余積に関する結果を述べる。

定理 2.1 ([5]) 条件 (H) のもと, 双対ループ余積を用いて積

$$m : H^*(LBG;\mathbb{K}) \otimes H^*(LBG;\mathbb{K}) \to H^{*+d}(LBG;\mathbb{K}), \quad d := -\dim G$$

を $m(a \otimes b) := (-1)^{d(d-|a|)} Dlcop(a \otimes b)$ と定義する。このとき, もし $\{i_1, ...i_l\} \cup \{j_1, ..., j_m\} = \{1, ..., N\}$ ならば, $m(sv_{i_1} \cdots sv_{i_l} a \otimes sv_{j_1} \cdots sv_{j_m} b) = (-1)^{\varepsilon' + \varepsilon + m + u + lu + Nm} sv_{k_1} \cdots sv_{k_u} ab$ が成り立ち, それ以外ならば, $m(sv_{i_1} \cdots sv_{i_l} a \otimes sv_{j_1} \cdots sv_{j_m} b) = 0$, ただし $\{i_1, ...i_l\} \cap \{j_1, ..., j_m\} = \{k_1, .., k_u\}$, $a, b \in H^*(BG;\mathbb{K})$,

$$(-1)^{\varepsilon} = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} j_1 .... & .... & .... & ...j_m \\ k_1 ... k_u j_1 ... \widehat{k_1} ... \widehat{k_u} ... j_m \end{pmatrix}, \ (-1)^{\varepsilon'} = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1 ... i_l j_1 ... \widehat{k_1} ... \widehat{k_u} ... j_m \\ 1.... \quad .... \quad .... \quad ...N \end{pmatrix}.$$

次に, ランク 2 のコンパクト単連結, 単純例外 Lie 群 G_2 を考える。その分類空間の $\mathbb{Z}/2$ 係数コホモロジーは多項式環であるが, 条件 (H) は成り立たない。しかしループコホモロジーは, 次のように完全に決定している。$H^*(BG_2;\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2[y_4, y_6, y_7]$ 上の次数付き可換代数として

$$\begin{aligned} H^*(LBG_2;\mathbb{Z}/2) &\cong \Delta(x_3, x_5, x_6) \otimes \mathbb{Z}/2[y_4, y_6, y_7] \\ &\cong \mathbb{Z}/2[x_3, x_5] \otimes \mathbb{Z}/2[y_4, y_6, y_7] \Big/ \begin{pmatrix} x_3^4 + x_5 y_7 + x_3^2 y_6 \\ x_5^2 + x_3 y_7 + x_3^2 y_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ, ただし $\deg x_i = i$, $\deg y_j = j$ である ([4, Remark 3.4] 参照)。

定理 2.2 ([5]) 双対ループ余積 $Dlcop : H^*(LBG_2;\mathbb{Z}/2) \otimes H^*(LBG_2;\mathbb{Z}/2) \to H^{*-14}(LBG_2;\mathbb{Z}/2)$ は可換で, 部分加群 $\Delta(x_3, x_5, x_6)^{\otimes 2}$ 上非自明な積は次と, その定義域元を交換したものに限る：

$$Dlcop(x_3x_5x_6 \otimes 1) = Dlcop(x_3x_5 \otimes x_6) = Dlcop(x_3x_6 \otimes x_5) = Dlcop(x_5x_6 \otimes x_3) = 1,$$

$$\begin{aligned} &Dlcop(x_3x_5x_6 \otimes x_3) = Dlcop(x_3x_5 \otimes x_3x_6) = x_3, \\ &Dlcop(x_3x_5x_6 \otimes x_5) = Dlcop(x_3x_5 \otimes x_5x_6) = x_5, \\ &Dlcop(x_3x_5x_6 \otimes x_6) = Dlcop(x_3x_6 \otimes x_5x_6) = x_6 + y_6, \\ &Dlcop(x_3x_5x_6 \otimes x_3x_5) = x_3x_5, \\ &Dlcop(x_3x_5x_6 \otimes x_3x_6) = x_3x_6 + x_3y_6, \\ &Dlcop(x_3x_5x_6 \otimes x_5x_6) = x_5x_6 + x_5y_6 + y_4y_7, \\ &Dlcop(x_3x_5x_6 \otimes x_3x_5x_6) = x_3x_5x_6 + x_3x_5y_6 + x_3y_4y_7 + y_7^2. \end{aligned}$$

注意 2.3 $Dlcop$ は一般に左 $H^*(BG) \otimes H^*(BG)$-加群写像であるから定理 2.2 により, $H^*(LBG_2;\mathbb{Z}/2)$ 上の $Dlcop$ による積構造は完全に決定出来る。

参考文献

[1] M. Chas and D. Sullivan, String topology, preprint (math.GT/0107187).

[2] D. Chataur and L. Menichi, String topology of classifying spaces, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **669** (2012), 1-45.

[3] Y. Félix and J. -C. Thomas, String topology on Gorenstein spaces, Mathematische Annalen **345**(2009), 417-452.

[4] A. Kono and K. Kuribayashi, Module derivations and cohomological splitting of adjoint bundles, Fundamenta Mathematicae **180**(2003), 199-221.

[5] K. Kuribayashi, L. Menichi, The Batalin-Vilkovisky algebra $\mathbb{H}^*(LBG)$, in preparation.

[6] K. Kuribayashi, L. Menichi and T. Naito, Behavior of the Eilenberg-Moore spectral sequence in derived string topology, Topology and its Applications **164** (2014), 24-44.

[7] K. Kuribayashi, L. Menichi and T. Naito, Derived string topology and the Eilenberg-Moore spectral sequence, Israel Journal of Mathematics **209** (2015), 745-802.