導来ストリングトポロジー

–分類空間の２次元開閉位相的場の理論へ–[1]

栗林 勝彦　(信州大学)*

1. はじめに

多様体の自由ループ空間のホモロジー (ループホモロジー) にループ積･余積をはじめ豊かな代数構造を与えたのは Chas–Sullivan [CS] であり，その創始から 20 年が経った．ループホモロジーの代数的構造の解明や幾何学への応用還元の研究がストリングトポロジーと言って良い．この 20 年間で，安定ホモトピー論的考察 [CJ, BCT, Go, Kup]，Floer コホモロジー，Hochschild コホモロジーとの関連 [Ab, CJ]，オービフォールドや分類空間を含む微分可能スタックへの一般化 [BGNX] やループホモロジー付随する位相的場の理論 [CG, Tam, BCT] など様々な構造がストリングトポロジーに現れている．さらに，曲面や高次元球面を定義域に持つ写像空間のホモロジー上に現れる代数構造の研究 (ブレーントポロジー) [GTZ, Wa2] も進んでいる．

この講演では，多様体や Lie 群の分類空間を含む Gorenstein 空間の特異コチェイン代数を考え，そこから得られる DG 圏の導来圏 [Ke] 上で展開される Félix–Thomas の導来ストリングトポロジー [FT] を概説する．さらに分類空間のループホモロジーに付随して現れる２次元の開閉位相的場の理論 [Gu]，特にホイッスルコボルディズム作用素の非自明性 [K20a]，そして今後の展望について述べたい．本講演の前半 (第２章) は Luc Menichi との共同研究に基づいている．

ストリングトポロジーには現れるが，本講演では触れられない重要かつ興味を引く付加構造は数多くある。些か散漫となってしまうが，それらを本講演内容と合わせて下記表でまとめる[2]．

表 1: ストリングトポロジーの研究対象とその構造／*は具体的計算結果も含む

\…ストリングトポロジー 付加構造 \	向付け可能 多様体	Lie 群の 分類空間	スタック (軌道体を含む)	Gorenstein 空間
ループ (余) 積	[CS] ('99)	[CM] ('08)	[BGNX]	[FT] [KMN]('15)
位相的場の理論 開閉理論	[CG] ('04) [Tam]('10) [BCT]	今回 [K20a] [Gu] ('11)	('12) [LUX]('08)	??
BV 代数構造 HCFT	[M09b]*[H](Lie 群)* [Go] ('08)	今回 [KM] [HL] ('15)	[A]* ('18) 軌道体関連	??
de Rham, 有理ホモトピー論	[Ir]('18) [FT] ('09)	[KM]('19)	ディフェオロジーの適用??	[FT] [Na]*('15) [Wa1]*('16)
計算ツールの開発	[CJY] ('04)	[KM]	[CN]('16)	[KMN]
導来圏での考察 Hochschild ホモロジー	[BCT] ('09) [M09a] [K11]*	[K16]*	??	[KMN]

2. 導来ストリングトポロジー

位相空間 X に対して，S^1 から X への連続写像全体にコンパクト開位相を入れた位相空間を $LM := \mathrm{map}(S^1, X)$ と表し X の自由ループ空間という．以下 $\mathbb{K}$ を任意標数の体とする．本講演で扱う特異コチェイン代数関手 $C^*(-) := C^*(-;\mathbb{K})$ の係数は体 $\mathbb{K}$ であるとする．

キーワード：自由ループ空間，分類空間，導来ストリングトポロジー，開閉位相的場の理論
* 〒390-8621 長野県松本市旭 3-1-1 信州大学 学術研究院 理学系
e-mail: kuri@math.shinshu-u.ac.jp
[1] この原稿は 2020 年度日本数学会年会における同題目講演のアブストラクトの情報を更新し改編したものです．
[2] 論文集 [LO, Part I A panorama of topology, geometry and algebra] も参考にしていただきたい．

導来ストリングトポロジーの基本定理 (定理 2.4 後述) を解説することから始めよう．まず，Félix–Halperin–Thomas により導入された Gorenstein 空間の定義を述べる．

定義 2.1 ([FHT]) 次の性質を持つ連結空間 M を d 次数 **$\mathbb{K}$-Gorenstein 空間**という:

$$\dim \operatorname{Ext}^k_{C^*(M)}(\mathbb{K}, C^*(M)) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq d \\ 1 & \text{if } k = d. \end{cases}$$

向きづけられた多様体，より一般に連結 Poincaré 双対空間 [3]，連結 Lie 群 G の分類空間は Gorenstein 空間になる．さらに単連結 G-空間 M が d 次元 Poincaré 双対空間であるならば，その Borel 構成 $EG \times_G M$ は $(d - \dim G)$ 次数 Gorenstein 空間となる [FHT, Mu]．こうして，(例えば分類空間 $BG = EG \times_G pt$ の) 次数は負にもなり得る．

補題 2.2 M を d 次元，連結 Poincaré 双対空間とし，$f : N \to M$ を連結空間からの写像とする．このとき，同型 $\operatorname{Ext}^*_{C^*(M)}(C^*(N), C^*(M)) \cong H^{d-*}(N)$ が成り立つ．ただし，$C^*(N)$ は f が誘導する写像により $C^*(M)$-加群とみなす.

実際，$C^*(M)$-加群圏 Mod-$C^*(M)$ にける (コファイブラント置換) 半自由分解 $\mathcal{F} \overset{\simeq}{\to} C^*(N)$ を用いて，次の同型の列を得る．

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Ext}^n_{C^*(M)}(C^*(N), C^*(M)) \\
= \; & H^n(\operatorname{Hom}_{C^*(M)}(\mathcal{F}, C^*(M))) \cong H^n(\operatorname{Hom}_{C^*(M)}(\mathcal{F}, C_*(M)^\vee)) \\
\cong \; & H^n(\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{F} \otimes_{C_*(M)} C_*(M), \mathbb{K})) \cong H^n(\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{F} \otimes_{C^*(M)} s^d C^*(M), \mathbb{K})) \\
= \; & \operatorname{Tor}^{-n}_{C^*(M)}(C^*(N), s^d C^*(M))^\vee = \operatorname{Tor}^{-n+d}_{C^*(M)}(C^*(N), C^*(M))^\vee \cong H^{d-n}(N)^\vee.
\end{aligned}$$

ここで，$(\text{-})^\vee$ は (-) の双対を意味し，$s^d C^*(M)$ は次数シフト $(s^d C^*(M))^k := C^{d+k}(M)$ である．また 3 番目の同型は M の Poincaré 双対性からしたがう．この補題から N を一点として考えれば，連結 Poincaré 双対空間が Gorenstein 空間であることがわかる．特に M を向き付け可能 d 次元閉多様体とすると M は d 次数 Gorenstein 空間となる．

定理 2.3 ([FT, Theorem 12]) X を d 次数単連結 $\mathbb{K}$-Gorenstein 空間で $\mathbb{K}$ 係数コホモロジーが有限型であるとする．このとき $\operatorname{Ext}^*_{C^*(X^n)}(C^*(X), C^*(X^n)) \cong H^{*-(n-1)d}(X)$ が成り立つ．ここで，$C^*(X)$ は対角写像 $\Delta : X \to X^n$ により $C^*(X^n)$-加群と考えている．

この定理の証明においては Ext 群に収束する適切なスペクトル系列と $C^*(X^n)$ の TV-モデル [4][HalL, NT] が効果的に用いられている．

定理 2.4 X を上述の定理と同じ仮定をみたす Gorenstein 空間とし，導来圏 $\mathcal{D}(\text{Mod-}C^*(X^n))$ 上，$\operatorname{Ext}^{(n-1)d}_{C^*(X^n)}(C^*(X), C^*(X^n)) \cong H^0(X) \cong \mathbb{K}$ の生成元に対応する射 $\Delta^! : C^*(X) \to C^{*+(n-1)d}(X^n)$ を選ぶ．このとき，p をファイブレーションとする引き戻し図式

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{g} & E \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[\Delta]{} & X^n, \end{array}$$

に対して，$\operatorname{Ext}^{(n-1)d}_{C^*(E)}(C^*(E'), C^*(E))$ の元であり，$\mathcal{D}(\text{Mod-}C^*(X^n))$ 上で次の図式を可換にする射 $g^!$ が一意に存在する:

$$\begin{array}{ccc} C^*(E') & \xrightarrow{g^!} & C^*(E) \\ {\scriptstyle (p')^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle p^*} \\ C^*(X) & \xrightarrow[\Delta^!]{} & C^*(X^n). \end{array}$$

---

[3] 例えば，旗多様体の部分空間 Hessenberg variety は $\mathbb{Q}$-Poincaré 双対空間である [AHHM]， したがって，それら及び，Borel 構成のストリングトポロジーも展開可能である．シューベルト・カルキュラスの立場からのアプローチも期待出来る．また，オービフォールドも $\mathbb{Q}$-Poincaré 双対空間となる [ALR, §1.3].

[4] 有理ホモトピー論における Sullivan モデルの mod p 非可換版とみなせる.

この定理に現れる射 $g^!$ を **Gysin 写像** (shriek 写像) と呼ぶ．

定理 2.3 の条件をみたす単連結空間 M を考える．$t = 0$ での評価写像 $ev_0 : LM \to M$ はファイブレーションとなり，上述の定理 2.4 の構成を適用して次の $\mathcal{D}(\text{Mod-}C^*(M^2))$ 内の図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
C^*(LM) \arrow[r, "Comp^*"] & C^*(LM \times_M LM) \arrow[r, "q^!"] & C^*(LM \times LM) \\
C^*(M) \arrow[u, "ev_0^*"] \arrow[r, equal] & C^*(M) \arrow[u, "\rho^*"] \arrow[r, "\Delta^!"'] & C^*(M \times M). \arrow[u, "(ev_0 \times ev_0)^*"']
\end{tikzcd} \tag{1}$$

上段の写像の合成として次数 d を持つ双対ループ積 $\mathrm{Dlp} : C^*(LM) \to C^{*+d}(LM \times LM)$ が定義される．M が単連結閉多様体である場合，Chas–Sullivan, Cohen–Jones [CJ] が定義したループ積 lp は Thom 類の持ち上げとのキャップ積，そして Thom カラプス写像との合成で与えられるから，その双対は交叉積の双対 $\Delta^!$ の持ち上げを定義する $\mathcal{D}(\text{Mod-}C^*(M^2))$ 上の射となる [FT, page 419]．したがって，定理 2.4 の写像の一意性から，上述の導来圏の枠組みで定義されるループ積は Cohen–Jones による交叉積を用いて定義される多様体 M 上の「本来」のループ積 lp と一致する [5]． すなわち

$$\mathrm{lp} = H(\mathrm{Dlp}^\vee) : H_*(LM \times LM) \to H_{*-\dim M}(LM) \tag{2}$$

が成り立つ．このように，Félix–Thomas [FT] による Gorenstein 空間 M 上のストリングトポロジーは，コチェイン複体 $C^*(M \times M)$ を微分代数と見なすとき，次数付き $C^*(M \times M)$-微分加群からなる圏の導来圏上で展開される．このため**導来ストリングトポロジー**と呼ばれる．

Gorenstein 空間のループ余積 [6] も同様に定理 2.4 の一意的持ち上げにより $\mathcal{D}(\text{Mod-}C^*(M^2))$ 上の射から誘導される．しかし，多様体のストリングトポロジーに現れる位相的場の理論の Gorenstein 空間版はまだ確立されていない．

2.1. Chataur–Menichi による分類空間のストリングトポロジー

Chataur–Menichi [CM] はコンパクト連結 Lie 群 G の分類空間 BG のループコホモロジー上でホモロジー的共形場理論 (Homological Conformal Field Theory, HCFT) が展開できることを示した．したがって，BG のループコホモロジーは 2 次元の位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory, TQFT) になる [7]． TQFT における重要なストリング作用素として，ペア・オブ・パンツ・コボルディズム $\Sigma_{0,2+1}$ (または $\Sigma_{0,1+2}$) から得られる体係数ホモロジー上のループ積 (またはループ余積) がある．この章では，その HCFT 構造が分類空間のループホモロジー上にどのように定義されるのかを解説する [8]．

まず，$\mathcal{P}$ をプロップ (PROP, products and permutations) とする．すなわち狭義の対称モノイダル圏 (例えば [Ko, 3.2.4]) で対象は非負整数の集合 $\mathbb{Z}_+$ と同一視され，対象上のモノイド構造は整数の和で定義されている：$p \otimes q = p + q$．こうして射の作る集合上では次の 2 つの合成が考えられる:

$$- \otimes - : \mathcal{P}(p, q) \otimes \mathcal{P}(p', q') \to \mathcal{P}(p + p', q + q'), \quad - \circ - : \mathcal{P}(q, r) \otimes \mathcal{P}(p, q) \to \mathcal{P}(p, r).$$

例えば，ベクトル空間 V に対して $\mathcal{E}nd_V(p, q) := \mathrm{Hom}(V^{\otimes p}, V^{\otimes q})$ とし，合成 $- \otimes -$ を写像のテンソル積で，$- \circ -$ を線形写像の合成で定義したものはプロップである．

---

[5] ここでの議論は [栗林] で概説しています．

[6] 次章では分類空間に対して定義する．

[7] 3 章で述べる開閉位相的場の理論における閉理論部分，すなわち対象を S^1 の位相和 $\coprod S^1$ に制限した充満部分圏からのモノイダル関手である．

[8] 多様体のループホモロジー上の HCFT 構造に関しては，[Cha], [Go], [Kup] 参照．

定義 2.5 V を次数付きベクトル空間で $\mathcal{P}$ を線形プロップ (射の集合がベクトル空間) であるとする．線形プロップの射 $F : \mathcal{P} \to \mathcal{E}nd_V$ が存在するとき，V を $\mathcal{P}$ 上の代数という．すなわち，F はモノイダル関手であり，さらに $\mathcal{P}$ における交換同型射 $\tau_{m,n} : m \otimes n \to n \otimes m$ が存在する場合，$F(\tau_{m,n}) = \tau_{V^{\otimes m}, V^{\otimes n}}$ をみたす．ここで，$\tau_{V^{\otimes m}, V^{\otimes n}}$ は次数付きの交換射である．

非負整数 g, p, q に対して，ジーナス g，p 個 (q 個) のイン (アウト) バウンダリーを持つ向付け可能曲面を $\Sigma_{g,p+q}$ と表す．このとき，$D_{g,p+q} := \mathrm{Diff}^+(\Sigma_{g,p+q}, \partial)$ を曲面 $\Sigma_{g,p+q}$ 上の境界を各点ごとに止め，向きを保つ微分同相写像全体の作る群とし，

$$BD(p,q) := \coprod_{\Sigma_{g,p+q}, g \geq 0} B\mathrm{Diff}^+(\Sigma_{g,p+q}, \partial)$$

とおく．ここで，直和は位相和 $\coprod_p S^1$ から $\coprod_q S^1$ へのコボルディズム類を動くものとする．$H_*(BD)(p,q) := H_*(BD(p,q))$ と定めると，コボルディズムの和と合成は $H_*(BD)$ にプロップ構造を定める．

定義 2.6 次数付きベクトル空間 V がプロップ $H_*(BD)$ 上の代数であるとき，V を**ホモロジー的共形場理論** (HCFT) という．

プロップ構造はその随伴を経由して写像 $H_*(BD)(p,q) \otimes V^{\otimes p} \to V^{\otimes q}$ を定めることに注意する．また $H_0(BD)(p,q)$ 上に制限された作用が V 上に TQFT 構造を定める．

さて，G をコンパクト連結 Lie 群，BG をその分類空間とする．このとき境界への包含写像から得られる次の 2 つの写像を考える．

$$LBG^{\times p} \xleftarrow{\mathrm{map(in}, BG)} \mathrm{map}(\Sigma_{g,p+q}, BG) \xrightarrow{\mathrm{map(out}, BG)} LBG^{\times q}$$

それぞれに，Borel 構成を行うことで，新たに 2 つの写像

$$\rho_{\mathrm{in}} : \mathcal{M}_{g,p+q}(BG) := ED_{g,p+q} \times_{D_{g,p+q}} \mathrm{map}(\Sigma_{g,p+q}, BG) \to BD_{g,p+q} \times LBG^{\times p},$$

$$\rho_{\mathrm{out}} : ED_{g,p+q} \times_{D_{g,p+q}} \mathrm{map}(\Sigma_{g,p+q}, BG) \to BD_{g,p+q} \times LBG^{\times q} \xrightarrow{pr_2} LBG^{\times q}$$

を得る．ここで，$ED_{g,p+q} \to BD_{g,p+q}$ は普遍 $D_{g,p+q}$-バンドルを表し，pr_2 は第 2 成分への射影である．ρ_{in} はファイブレーションであり，ファイバーとして基点を保つ連続写像全体から成る空間 $\mathrm{map}_*(\Sigma_{g,p+q}/\partial_{\mathrm{in}}, BG)$ を持ち，さらにこのファイバーのホモロジーのトップクラスとして‘向き’ $\omega \in H_{-d\chi_\Sigma}(\mathrm{map}_*(\Sigma_{g,p+q}/\partial_{\mathrm{in}}, BG))$ を定めることができる．ここで χ_Σ は曲面 $\Sigma_{g,p+q}$ の Euler 標数 $2k-2g-p-q$ (k は連結成分の個数)，$d = \dim G$ である．したがって，この向きを使って，次数 $-d\chi_\Sigma$ を持つファイバーに沿う積分写像 $\rho_{\mathrm{in}!} : H_*(BD_{g,p+q} \times LBG^{\times p}) \to H_{*-d\chi_\Sigma}(\mathcal{M}_{g,p+q}(BG))$ が定義される．誘導写像 $H(\rho_{\mathrm{out}})$ との合成で，準同型写像

$$\nu(\Sigma_{g,p+q}) : H_*(BD_{g,p+q}) \otimes H_*(LBG)^{\otimes p} \to H_{*-d\chi_\Sigma}(LBG)^{\otimes q} \tag{3}$$

を得る．コボルディズム $\Sigma_{g,p+q}$ の各連結成分のインおよびアウト・バウンダリーをそれぞれ少なくとも 1 つ持つ場合に作用 $\nu(\Sigma_{g,p+q})$ が定義されていることに注意する [9]．

定理 2.7 ([CM]) G を連結コンパクト Lie 群とする．このとき上述の作用 $\nu(\Sigma_{g,p+q})$ によりホモロジー $H_*(LBG)$ は非単位的，非余単位的 HCFT となる．すなわち作用素が定義される場合にプロップの構造 (定義 2.5 の関手) が意味を持ち，射の 2 種類の合成 $- \otimes -$ および $- \circ -$ と可換である．

[9] さらに定理 2.11 で見るように，厳密にはファイバーの向きの情報を同型 $H_{-d\chi_\Sigma}(\mathrm{map}_*(\Sigma_{g,p+q}/\partial_{\mathrm{in}}, BG)) \cong (\det H_1(\Sigma, \partial_{\mathrm{out}}; \mathbb{Z}))^{\otimes d}$ により，左辺の determinant プロップで表示して，上述のプロップ $H_*(BD)$ とのテンソル積上で ν は定義される．

特に，作用素 $\nu(\Sigma_{g,p+q})$ を $H_0(BD_{g,p+q})$ に制限することで $H_*(LBG)$ に TQFT 構造が定義されることになる．

コンパクト連結 Lie 群 G の分類空間のペアオブパンツ $\Sigma_{0,1+2}$ に対応するストリング作用素 (ループ余積) $\nu(\Sigma_{0,1+2})(1\otimes -) : H_*(LBG) \to H_{*+d}(LBG)^{\otimes 2}$ を考える． この時，レトラクト $r : \Sigma_{0,1+2} \overset{\approx}{\twoheadrightarrow} S^1 \vee S^1$ を使って次の可換図式が得られる:

$$\begin{tikzcd}
LBG & \mathrm{map}(\Sigma_{0,1+2}, BG) \arrow[l, "\mathrm{map}(\mathrm{in}, BG)"'] \arrow[r, "\mathrm{map}(\mathrm{out}, X)"] & LBG^{\times 2} \\
& LBG \times_{LBG} LBG \arrow[ul, "\mathrm{Comp}"] \arrow[u, "\approx", "\mathrm{map}(r, BG)"'] \arrow[ur, "q"'] &
\end{tikzcd}$$

ここで Comp はループの結合写像であり, q は包含写像を表している．BG は Gorenstein 空間であり，Comp のファイバーに沿う積分写像は Gysin 写像 (shriek 写像) で書くことができるので ([FT, Theorem 13])，BG のストリングトポロジーも導来ストリングトポロジーといえる[10]．

TQFT には現れない作用素として重要なのが Batalin–Vilkovisky (BV) 作用素である．まず BV 代数の定義を思い出す．

定義 2.8 次の条件をみたす準同型 $\Delta : A_* \to A_{*+1}$(BV 作用素) を持つ次数付き可換代数 A_* を **Batalin–Vilkovisky 代数 (BV 代数)** という：(1) $\Delta^2 = 0$, (2) 任意の $a, b, c \in A_*$ に対して，

$$\Delta(abc) = \Delta(ab)c + (-1)^{|a|}a\Delta(bc) + (-1)^{(|a|-1)|b|}b\Delta(ac) \\ - (\Delta a)bc - (-1)^{|a|}a(\Delta b)c - (-1)^{|a|+|b|}ab(\Delta c).$$

S^1 の自由ループ空間 LM への作用 $\varphi : S^1 \times LM \to LM$ を $\varphi(s,\gamma)(t) = \gamma(t+s)$ と定義し，S^1 の向き $[S^1]$ を用いて次数 $+1$ の作用素 Δ を

$$\Delta : H_*(LM) \xrightarrow{[S^1]\times -} H_{*+1}(S^1 \times LM) \xrightarrow{\varphi_*} H_{*+1}(LM) \tag{4}$$

と定義する．M を d 次元の連結多様体としよう．ループ積 $\mathrm{lp} : H_*(LM)\otimes H_*(LM) \to H_{*-d}(LM)$ に対して (式 (2) 参照)，$a \bullet b = (-1)^{d(\deg a + d)}\mathrm{lp}(a \otimes b)$ と定義する．このとき，次を得る．

定理 2.9 ([CJ]) ループホモロジーは BV 代数 $(\mathbb{H}_*(LM), \bullet, \Delta)$ を与える．

後で見るように，BV 代数構造はループホモロジーが持つホモロジー的共形場理論構造の一部に現れる．BV 作用素は一般には Leibniz 則をみたさないが，その '差' を計って次数 $+1$ の Lie 括弧積が定義される:

$$\{a, b\} := (-1)^{|a|}\Delta(a \bullet b) - (-1)^{|a|}\Delta(a) \bullet b - a \bullet \Delta(b).$$

こうして BV 代数は Gerstenhaber 代数になる．すなわち，代数でありかつ $\{\ ,\}$ に関して次数付き Lie 代数であり，Lie 括弧積が Poisson 関係式 $\{a, bc\} = \{a, b\}c + (-1)^{(|a|+1)|b|}b\{a, c\}$ をみたす (詳細は例えば [G] 参照)．

注意 2.10 BV 作用素は写像類群における Dehn ツイストから Hurewicz 写像経由で得られる $H_1(BD_{0,1+1})$ 上の生成元を用いて定義される (式 (3) 参照)．Dehn ツイストのランタン関係式を適用して，BV 作用素 (4) の双対 $\Delta : H^*(LBG) \to H^{*-1}(LBG)$ が BV 恒等式 (定義 2.8) をみたすことがわかる ([Kup])．

また一般にループコホモロジー $H^*(LX)$ において，0 での評価写像であるファイブレーション $\mathrm{ev}_0 : LX \to X$ がコホモロジー上に誘導する写像と BV 作用素の双対との合成が，論文 [KK]

[10] q のファイバー沿う積分写像の双対が先の可換図式 (1) の Gysin 写像 $q^!$ であり，分類空間のループ積が定義出来る．しかし，定理 3.3 後の注釈で見るように，'ほとんどの場合' この積は自明になってしまう．

の加群微分子である．したがって，その論文中で行った自由ループ空間のコホモロジーの計算から従う定理 [KM, Theorems 3.1, 5.1, 5.7] のように，双対ループ余積 Dlcop をカップ積で記述し，カップ積に関して Leibniz 則をみたす加群微分子を適用することで，BV 作用素を計算することができる．こうして $H^*(BG)$ が多項式環である場合，分類空間のループコホモロジーは BV 代数として完全に決定できる ([KM, Theorems 4.3, 5.13, 5.14])．

注意 2.10 で述べた具体的計算の応用として，プロップが定義する分類空間のループコホモロジー上の HCFT 構造が，そのプロップ上の代数に次数付き BV 代数構造を誘導することがわかる．ここで重要なのはプロップ構造は作用する次数付きベクトル空間には依らないということである．すなわち上述の具体的計算によりプロップの向き付けの作用を決めたことになり，次の定理を得る．以下，コンパクト曲面 $\Sigma_{g,p+q}$ を g,p,q を省略して単に Σ または Σ_{p+q} と表す．また $\det H_1(\Sigma,\partial_{\rm out};\mathbb{Z})$ を $H_1(\Sigma,\partial_{\rm out};\mathbb{Z})$ 上の外積代数のトップ次元の加群により定義されるプロップとする ([CM, 11.4])．

定理 2.11 ([KM]) プロップ $\bigoplus_\Sigma \left(\det H_1(\Sigma,\partial_{\rm out};\mathbb{Z})\right)^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{Z}} H_*(B\mathrm{Diff}^+(\Sigma,\partial))$ 上の代数である次数付きベクトル空間 H^* を考える．その作用

$$\nu^* : (\det H_1(\Sigma_{p+q},\partial_{\rm out};\mathbb{Z}))^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{Z}} H_*(B\mathrm{Diff}^+(\Sigma_{p+q},\partial)) \otimes (H^*)^{\otimes p} \to (H^*)^{\otimes q}$$

に対して $\nu^*(s\otimes a)v$ を $\nu^{*s\otimes a}(\Sigma_{p+q})v$ と表す．向き $s \in \left(\det H_1(\Sigma_{0,2+1},\partial_{\rm out};\mathbb{Z})\right)^{\otimes d}$ および生成元 $\eta \in H_0(B\mathrm{Diff}^+(\Sigma_{0,2+1},\partial))$ を指定して，H^* 上の積 $\odot : H^*\otimes H^* \to H^*$ を

$$a\odot b = (-1)^{d(i-d)}\mathrm{Dlcop} := \nu^{*s\otimes\eta}(\Sigma_{0,2+1})(a\otimes b)$$

で定義する．ここで， $a\otimes b \in H^i \otimes H^j$ である．以上の設定の下，次数をシフトし $\mathbb{H}^* := H^{*+d}$ と定義するとき，$(\mathbb{H}^*,\odot)$ は次数付き可換代数である．さらに $\overline{\alpha}$ をシリンダー $\Sigma_{0,1+1}$ の Dehn ツイストから得られる，$H_1(B\mathrm{Diff}^+(\Sigma,\partial))$ 上の元とする．$\mathbb{H}^*$ 上の作用 $\Delta : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}^{*-1}$ を $\Delta = \nu^{*id_1\otimes\overline{\alpha}}(\Sigma_{0,1+1})$ と定めるとき，$(\mathbb{H}^*,\odot,\Delta)$ は次数付き可換 BV 代数となる．

Hochschild コホモロジーと分類空間のループコホモロジーの関係を述べてこの章を閉じる．連結 Lie 群 G の整係数ホモロジーが p-トージョンを持たない時は，BV 代数としてループコホモロジー $H^{*+\dim G}(LBG;\mathbb{Z}/p)$ は Hochschild コホモロジー $HH^*(H_*(G;\mathbb{Z}/p);H_*(G;\mathbb{Z}/p))$ と同型である ([KM, Theorem 6.2])．したがって，特に Gerstenhaber 代数として同型となる．ここで，Hochschild コホモロジー上の BV 作用素は Connes 境界作用素が定義する [M09a]．ところが，G の整係数ホモロジーが p-トージョンを持つ場合，上のような BV 代数としての同型は一般には成立しない．$G = G_2$ や $SO(3)$ がその場合にあたるが ([KM, Theorem 6.3])，しかし Gerstenhaber 代数としては (不思議だが) 同型になる．具体的な計算により得られる結果であるため，この現象を完全に特徴付ける Lie 群 G または分類空間 BG の性質は不明である．

3. Guldberg による分類空間のラベル付き開閉位相的場の理論

まず，一般的なラベル付き 2 次元 TQFT を導入するために，集合 $\mathcal{S}$ によりラベル付けられた開閉コボルディズムの圏 $\mathsf{oc\text{-}Cobor}(\mathcal{S})$ を次のように定義する．対象は S^1 および端点が $\mathcal{S}$ の元によりラベル付けたれた区間 $I=[0,1]$ の直和である．対象 Y_0 から Y_1 への射は 2 次元の向き付けられた曲面 (2 次元コボルディズム) の微分同相類である．その 2 次元コボルディズムは次のような 3 つの部分からなる境界 $\partial\Sigma$ を持つものとする (図 (5) 参照):

$$\partial\Sigma = Y_0 \cup Y_1 \cup \partial_{\rm free}\Sigma$$

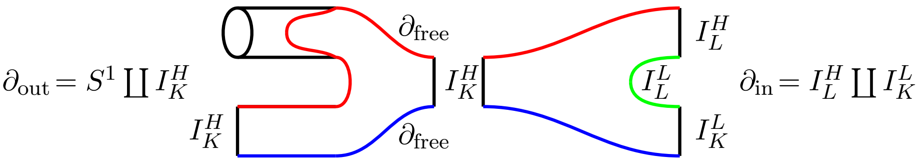
以降，コボルディズム Σ が文脈から明確であるとき，Y_0 と Y_1 をそれぞれ，$\partial_{\rm in}$ と $\partial_{\rm out}$ と表す．また，自由境界と呼ばれる境界部分 $\partial_{\rm free}\Sigma$ は，境界 ∂Y_0 と ∂Y_1 の 1 次元コボルディズムであり，

∂Y_0 と ∂Y_1 のラベルと両立する $\mathcal{S}$ 上のラベルが付加されているものとする．射の合成は，コボルディズムを境界で接着することで与えられる．ただし，ラベルを保つように接着することが要求される [11]．

字数付きベクトル空間のなす圏を $\mathbb{K}$-Vect と表す．射は次数を保存するとは限らない線形写像である．このとき，モノイダル関手

$$\mu : (\text{oc-Cobor}(\mathcal{S}), \coprod) \longrightarrow (\mathbb{K}\text{-Vect}, \otimes)$$

を $\mathcal{S}$ により**ラベル付けられた 2 次元開閉位相的場の理論**という．ここで，$\coprod$ はコボルディズムの直和を表し，ラベル付けられた開閉コボルディズムの圏のモノイダル構造を定義している．以下 2 次元のコボルディズム Σ に対して関手 μ により定まる線形写像を μ_Σ と表し，**コボルディズム作用素**と呼ぶ．また，$(\Sigma, \{\Sigma^H\}_{H\in\mathcal{S}})$ によりラベル付き自由境界の連結成分が $\{\Sigma^H\}_{H\in\mathcal{S}}$ で与えられるコボルディズムを表す．ただし，ラベル H によっては $\Sigma^H = \emptyset$ もありえる．



(5)

次に，Guldberg [Gu] による分類空間のラベル付き 2 次元開閉位相的場の理論を紹介する [12]．コンパクト連結 Lie 群 G とその閉部分群からなる集合を $\mathcal{B}$ と表す．ラベル付きのコボルディズム $\Sigma := (\Sigma, \{\Sigma^H\}_{H\in\mathcal{B}})$ に対して，空間 $\mathcal{M}(\Sigma)$ をプルバック図式

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(\Sigma) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{map}(\Sigma, BG) \arrow[d, "i^*"] \\ \prod_H \mathrm{map}(\Sigma^H, BH) \arrow[r, "B\iota_*"'] & \prod_H \mathrm{map}(\Sigma^H, BG), \end{tikzcd} \tag{6}$$

で定義する．ただし，$\iota : H \to G$ は包含写像，$i : \partial_{\text{free}}\Sigma = \coprod_H \Sigma^H \to \Sigma$ は埋め込みを示している．また，一次元のコボルディズム $\partial_{\text{in}} = (\partial_{\text{in}}, \{\Sigma^H \cap \partial_{\text{in}}\}_{H\in\mathcal{B}})$ に同様のプルバック構成を適用して，空間 $\mathcal{M}(\partial_{\text{in}})$ を得る．プルバック構成の自然性から，包含写像 $in : \partial_{in} \to \Sigma$ は写像 $in^* : \mathcal{M}(\Sigma) \to \mathcal{M}(\partial_{in})$ を誘導する．次の命題はコボルディズム作用素を構成する上で本質的である．

命題 3.1 ([Gu, Proposition 2.3.9]) (i) 包含写像 in はファイブレーション $\mathcal{M}(\Sigma)_c \to \mathcal{M}(\Sigma) \xrightarrow{in^*} \mathcal{M}(\partial_{in})$ を誘導し，そのファイバー $\mathcal{M}(\Sigma)_c$ は $\Omega BH \simeq H$, G/H' 及び，あるファイブレーション $\Omega BH'' \to E \to G/H''$ の全空間 E との積で与えられる．ただし，$H, H', H'' \in \mathcal{B}'$ はコボルディズム Σ のラベルである．
(ii) (i) におけるファイブレーションは向きづけ可能である．すなわち底空間の基本群のファイバーのホモロジーへの作用は自明である．

こうして，ファイブレーション $h := in^* : \mathcal{M}(\Sigma) \to \mathcal{M}(\partial\Sigma)$ に対して，ファイバーに沿う積分写像 $h_! : H_*(\mathcal{M}(\partial\Sigma)) \to H_{*+i}(\Sigma)$ が定義できる．その次数 i は $H_*(\mathcal{M}(\Sigma)_c)$ のトップ次数であることに注意する．次が [Gu] における主定理である．

定理 3.2 [Gu, Theorem 1.2.3]) コンパクト連結 Lie 群 G とその連結閉部分群からなる集合 $\mathcal{B}$ を指定する．$\mathcal{B}$ 上ラベル付けられたコボルディズム Σ に対して，合成

$$\mu_\Sigma : H_*(\mathcal{M}(\partial_{\text{in}})) \xrightarrow{h_!} H_*(\mathcal{M}(\Sigma)) \xrightarrow{(out^*)_*} H_*(\mathcal{M}(\partial_{\text{out}}))$$

[11] 対象には順序が付いていて，コボルディズムの合成においては，その順序を保つように接着する．さらなる詳細は [MS, LP] を参照．
[12] 多様体上の部分空間にラベルを持つ TQFT, HQFT に関しては [Go] を参照．

で定義されるコボルディズム作用素 μ_Σ はラベル付けられた 2 次元開閉位相的場の理論を与える．特に，$\mu_{\Sigma_1 \circ \Sigma_2} = \mu_{\Sigma_1} \circ \mu_{\Sigma_2}$ が成立する．

ここで，そしてこれ以降は TQFT に現れる符号 (determinants) 部分は無視する．すなわち，コボルディズム作用素の計算においては，non-zero 倍を無視する．

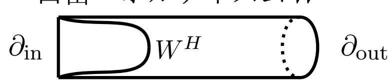
多様体 M のストリングトポロジーに戻って，高次ジーナスのコボルディズム作用素を考えよう．作用素 $\mu_{\Sigma_{p+q,g}}$ は $g > 0$ の場合 TQFT 構造によって少なくともループ余積とループ積に分解される対を 1 つ持つ: $\mu_{\Sigma_{g,p+q}} = \cdots \circ \mu_{\Sigma_{0,2+1}} \circ \mu_{\Sigma_{0,1+2}} \circ \cdots$．玉乃井の結果 ([Tam, Theorem A]) から作用素 $\mu_{\Sigma_{0,1+2}}$ の非自明な像は $H_0(LM)$ に含まれるが，作用素 $\mu_{\Sigma_{0,2+1}}$ の次数は $-d$ であるから，次数的理由により $\mu_{\Sigma_{g,p+q}} = 0$ となる．結果として，次の定理を得る．

定理 3.3 ([Tam, Theorem B]) $g > 0$ とする．このとき，ループホモロジー $H_*(LM)$ 上の作用素 $\mu_{\Sigma_{p+q,g}}$ は自明である．

この結果 [13] から，開閉 TQFT もある意味自明な作用素が多いのではないか，特に**開理論**と**閉理論**は「分離」してしまうのではないかと考えてしまう．そこで開弦と閉弦を繋ぐ重要な口笛コボルディズム (下図参照) から得られる作用の非自明性が気になる．

ラベル付けられたホイッスル・コボルディズム $W = (W, \{W^H\})$ を考える．そのイン・バウンダリー $\partial_{\rm in}$ は $I = [a, b]$ であり，H でラベル付けられたアーク $W^H = {}_a\cap_b$ の端点がそれぞれ a と b である．アウト・バウンダリー $\partial_{\rm out}$ は円 S^1 である．W の自由境界は W^H のみであることに注意する．

口笛コボルディズム W



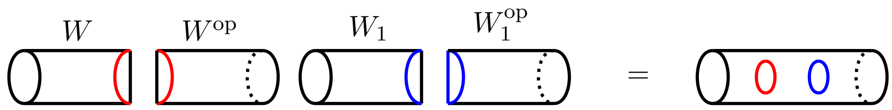
[K20a] の主定理は次のように述べられる．

定理 3.4 ([K20a, Theorem 1.1]) G をコンパクト連結 Lie 群，H を連結閉かつ最大階数部分群とし，G と H の整係数ホモロジーは p-トージョンを持たないとする．ただし p は体 $\mathbb{K}$ の標数である．このとき，口笛コボルディズム $W = (W, \{W^H\})$ 及び逆向き口笛コボルディズム $(W^{\rm op}, \{(W^{\rm op})^H\})$ に同伴する作用素 μ_W と $\mu_{W^{\rm op}}$ は非自明である．さらに，$(\deg(B\iota)^*(x_i), p) = 1$ $(i = 1, ..., l)$ が成り立つとき，合成作用素 $\mu_W \circ \mu_{W^{\rm op}} = \mu_{W \circ W^{\rm op}}$ も非自明である．ただし，$B\iota : BH \to BG$ は包含写像 $\iota : H \to G$ が誘導する分類空間の間の写像であり，$x_1, ..., x_l$ は $H^*(BG; \mathbb{K})$ の生成元である．

証明は，まずコホモロジー上で考えて，(6) のプルバック図式に Eilenberg–Moores スペクトル系列を適用して，計算に必要なコホモロジー環を求める．それらの生成元を Leray–Serre スペクトル系列の言葉で記述することで，フィイバーに沿う積分を計算する．

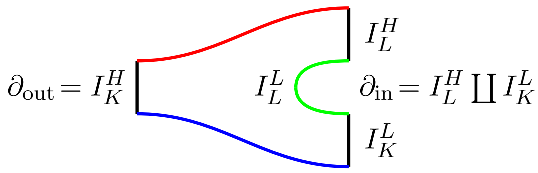
定理 3.4 の前半の仮定のもと，[K20a, Remark 3.3 (ii)] の結果から，口笛コボルディズムの逆の合成に同伴する作用素 $\mu_{W^{\rm op} \circ W}$ は自明になる．

注意 3.5 コボルディズム作用素 $\mu_{(W \circ W^{\rm op})}$ は一般には非自明であるが, 自由境界のラベルが W のそれと必ずしも一致しない口笛 W_1 に対して，$\mu_{(W^{\rm op} \circ W_1)} \equiv 0$ となる．結果として，コボルディズム作用素 $\mu_{(\text{2つの穴を持つシリンダー})}$ は自明である．



[13] また [KM, Theorems 7.1, 7.3] より連結 Lie 群 G に対して，$H(BG, \mathbb{K})$ が多項式環ならば BG 上の $\mathbb{K}$ 係数ループ積は自明である．

定理 3.6 (開TQFT構造 [K20a, Theorem 1.2]) Υ をラベル付けられた 2 つのインターバル I_L^H と I_K^L からラベル付けられた一つのインターバル I_K^H へのコボルディズムとする (下記の図参照). 定理3.4の前半の仮定のもと，コボルディズム作用素 μ_Υ は自明であるが，$\mu_{\Upsilon^{\mathrm{op}}}$ は一般には非自明である．実際，$\mu_{\Upsilon^{\mathrm{op}}}$ は単射である．



さらに具体的な計算を原理的には行うことができる．

定理 3.7 (有理係数の場合 [K20a, Assertion 4.1]) $\mathcal{B}$ を G の最大階数の連結閉部分群とする．このとき，Guldberg によるラベル付けられた TQFT の双対作用素 $\mu : (\textsf{oc-Cobor}(\mathcal{B}), \coprod) \to (\mathbb{Q}\textsf{-Vect}, \otimes)$ は，等質空間のコホモロジー環構造 (生成元とイデアルの生成元) から non-zero スカラー倍を除いて具体的に計算可能である．

コボルディズムの合成が引き起こす開閉 TQFT 上の関係式 (例えば，Cardy 等式など [LP, Section 3] 参照) の生成元による表記も興味深い問題である．また，[CM, Gu] で展開されている分類空間の HCFT において，その高次のコボルディズム作用素，すなわち写像類群の高次ホモロジーから得られる作用素 (セクション 2.1 参照) の具体的計算も残されている[14].

4. 展望

自由ループ空間のコホモロジー環の計算や有理，p-adic ホモトピー論に現れる写像空間の Sullivan/代数的モデルの構造を詳しく調べると，定義域空間のセル構造，値域空間に現れる Postnikov システムや一次 (さらには高次) 作用素の情報が，モデルの微分代数構造，E_∞-構造，そして写像空間のコホモロジー環の構造に反映して現れる．例えば，値域空間の Steenrod 代数構造が，自由ループ空間の代数構造を決めるイデアルの生成元を与える ([KK, Remark 3.4]) という現象も確認されている．したがって，ストリングトポロジーの研究は，値域空間に潜む内部構造を定義域空間の幾何学的構造を用いて表面にあぶり出す新しい方法を与えることが期待される．

4.1. ディフェオロジー

しかしながら，写像空間の取り扱いは一般には容易ではない．そこで，多様体の圏が埋め込まれ，さらにカルテシアン閉圏となるディフェオロジカル空間の圏[15]でストリング (及びブレーン) トポロジーを展開することは自然ではなかろうか．また，多様体や Lie 群の分類空間，オービフォールドを一般化した可微分スタック (Lie 亜群) 上で，ストリングトポロジーの枠組みが Behrend, Ginot, Noohi, Xu [BGNX] により整備された．しかし高次のコボルデズム作用素を含む計算は進んでいるとは必ずしも言えない．適切な導来圏上で Lie 亜群のストリングトポロジーを展開し，幾何学的な応用研究を進めるためには，入江 [Ir] に見るように de Rham 理論を展開する必要があると考えている．ここでも，写像空間をその枠組みで自由に捉えることができるディフェオロジカル空間の圏 Diff に注目することは自然である．

定義 4.1 集合 X 上のディフェオロジー $\mathcal{D}$ とは，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して n 次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合 U からの写像 $U \to X$ を元とする集合で，次の条件をみたす．

1. (Covering) 任意の n と開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して，各定値写像 $U \to X$ は $\mathcal{D}$ に属す．
2. (Compatibility) $\mathcal{D}$ の元 $U \to X$ および開集合 $V \subset \mathbb{R}^m$ からの任意の C^∞-写像 $V \to U$ に対して，合成 $V \to U \to X$ は $\mathcal{D}$ の元である．

[14] 講演者が知る限り，$H_1(BD)$ の生成元に対応する BV 作用素の計算しかない．

[15] ディフェオロジーに関する適書として [IZ] が挙げられる．基礎から，ディフェオロジカル空間のバンドルの概念，de Rham 計算が詳しく書かれている．

3. (Locality) $U = \cup_i U_i$ を開被覆とする． 写像 $p : U \to X$ の制限 $U_i \to X$ が $\mathcal{D}$ の元ならば，$p : U \to X$ も $\mathcal{D}$ の元である．

集合 X とディフェオロジー $\mathcal{D}$ の組み $(X, \mathcal{D})$ をディフェオロジカル空間 (以下，**diff-空間**) といい，$\mathcal{D}$ の元を X の**プロット**と呼ぶ．また，diff-空間の射 (C^∞–写像) $f : (X, \mathcal{D}^X) \to (Y, \mathcal{D}^Y)$ とは，集合の間の写像 $f : X \to Y$ で X のプロット p に対して，$f \circ p$ が Y のプロットになることである．こうして，diff-空間の圏 Diff が定義される．

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Mfd} \arrow[rr, bend left, "\ell\,:\,\text{embedding}"] \arrow[ddrr, bend right, "U\colon\text{forgetful}"'] & & \mathsf{Diff} \arrow[dl, shift left, "S^D(\ )"] \arrow[dd, shift left, "D"] & C\text{-}\mathsf{Diff} \arrow[l, "\text{full sub}"'] \arrow[dd, shift left, "D"] \\
& \mathsf{Sets}^{\Delta^{op}} \arrow[ur, shift left, "|\ |_D"] \arrow[ur, phantom, "\perp"] \arrow[dr, shift right, "|\ |"'] \arrow[dr, phantom, "\top"] & & \\
& & \mathsf{Top} \arrow[ul, shift right, "S(\ )"'] \arrow[uu, shift left, "C"] \arrow[uu, phantom, "\vdash"] & \Delta\text{-}\mathsf{Top} \arrow[l, "\text{full sub}"'] \arrow[uu, shift left, "C"] \arrow[uu, phantom, "\simeq"]
\end{tikzcd}
$$

多様体の圏 Mfd からの関手 ℓ は，アトラスから生成されるディフェオロジーを持つ diff-空間を対応させることで定義される．これが上述の埋め込みを与える．D は位相空間の圏 Top への関手であり，プロットによる逆像で開集合 (終位相, D-トポロジー) を持つ空間への対応により定義される．C は連続写像によりプロットを定義する関手である．Δ-Top は標準的単体 Δ^n からの連続写像に関する終位相を持つ空間の作る充満部分圏である．特に，全ての CW-複体を含む圏となっている．

S^D と $|\ |_D$ はそれぞれ Diff と単体的集合の圏 $\mathsf{Sets}^{\Delta^{op}}$ との間の (Christensen-Wu の意味の) 特異単体的集合関手，実現関手である．この関手と Top とを繋ぐ関手 C と D との合成はどちらも，Top と $\mathsf{Sets}^{\Delta^{op}}$ との間の特異単体的集合関手 $S(\ )$，幾何学的実現関手 $|\ |$ と弱ホモトピー同値を除いて一致する [CW14][16]．さらに，忘却関手 U が ℓ を経由していることがわかるので，diff-空間を対象とする微分トポロジーの展開も大いに期待できる．

実際，Diff における '微分ホモトピー論'[17]が近年，例えば [IZ, CW14, SYH, Ki, Ki20, II] で活発に議論されている．これらの結果に加えて，ストリングトポロジーを圏 Diff で展開するためには，ループ空間の de Rham 理論をつくる Chen の反復積分をディフェオロジー上で書き換えることが必要であろう．また 3 章で実行した具体的計算を行うためには，計算機械類であるディフェオロジカル空間の Leray–Serre スペクトル系列や Eilenberg–Moore スペクトル系列を構成することも必要である．このような de Rham ホモトピーの枠組みは [K20b, K20c] で整えられつつある．特に，近年導入された単体的 de Rham 複体に関しては，de Rham の定理が成立する ([K20b, Theorem 2.4])．こうして，非単連結空間の有理ホモトピー論[18]を Diff 上で書き換えることにより，de Rham 複体関手をとおして導来ストリングトポロジーの適用範囲を広げることが可能になるであろう．

参考文献

[AHHM] H. Abe, M. Harada, T. Horiguchi and M Masuda, The cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type A, Int. Math. Res. Not. IMRN **17** (2019) 5316–5388.

[Ab] M. Abouzaid, Symplectic cohomology and Viterbo's theorem, in "Free Loop Spaces in Geometry and Topology": Edited by Janko Latschev and Alexandru Oancea, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 24, 2015.

[ALR] A. Adem, J. Leida and Y. Ruan, Orbifolds and Stringy Topology, Cambridge Tracts in Mathematics (171), Cambridge University Press, 2007.

---

[16] 近年，木原 [Ki] は単体的集合に特別なディフェオロジーを入れることで単体的集合関手，実現関手を考え，Diff にモデル圏構造を導入した. さらに [Ki20] では Diff と $\mathsf{Sets}^{\Delta^{op}}$ との Quillen 同値が示されている．

[17] 岩瀬則夫氏 (九州大学) 命名による勉強会/研究集会 Building-up differentiable homotopy theory (2019 年 3 月 4 日-7 日　九州大学) より．

[18] たとえば，局所系を用いた Sullivan モデルに関しては [GHT, Mo]， 非連結 Lie モデルに関しては [BFMT] 参照．

[A] Y. Asao, Loop homology of some global quotient orbifolds. Algebr. Geom. Topol. **18** (2018), 613–633.

[BGNX] K. Behrend, G. Ginot, B. Noohi and P. Xu, String topology for stacks, Astérisque (2012), no. 343, xiv+169.

[BCT] A.J. Blumberg, R.L. Cohen and C. Teleman, Open-closed field theories, string topology, and Hochschild homology, "Alpine perspectives on algebraic topology", edited by C. Ausoni, K. Hess, and J. Scherer, Contemp. Math., AMS **502** (2009), 53–76.

[BFMT] U. Buijs, Y. Félix, A. Murillo andD. Tanré, Lie Models in Topology, Progress in Mathematics 335, Springer, 2020.

[CN] T. Coyne and B. Noohi, Singular chains on topological stacks, I, Adv. in Math. **303** (2016), 1190–1235.

[CS] M. Chas and D. Sullivan, String topology, preprint (math.GT/0107187).

[Cha] D. Chataur, A bordism approach to string topology, Int. Math. Res. Not. IMRN **46**(2005), 2829–2875.

[CM] D. Chataur and L. Menichi, String topology of classifying spaces, J. Reine Angew. Math. **669** (2012), 1–45.

[CW14] J.D. Christensen and E. Wu, The homotopy theory of diffeological spaces, New York J. Math. **20** (2014), 1269–1303.

[CG] R.L. Cohen and V. Godin, A polarized view of string topology, Topology, geometry and quantum field theory, 127-154, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[CJ] R.L. Cohen and J.D.S. Jones, A homotopy theoretic realization of string topology, Math. Ann. **324** (2002), 773–798.

[CJY] R. L. Cohen, J. D. S. Jones and J. Yan, The loop homology algebra of spheres and projective spaces. (English summary) Categorical decomposition techniques in algebraic topology (Isle of Skye, 2001), 77–92, Progr. Math., 215, Birkhäuser, Basel, 2004.

[FHT] Y. Félix, S. Halperin and J.-C. Thomas, Gorenstein spaces. Adv. Math. **71** (1988), 92–112.

[FT] Y. Félix and J.-C. Thomas, String topology on Gorenstein spaces, Math. Ann. **345** (2009), 417-452.

[G] E. Getzler, Batalin-Vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories, Comm. Math. Phys. **159** (1994), 265–285.

[Go] V. Godin, Higher string topology operations, preprint `arXiv:0711.4859`.

[GTZ] G. Grégory, T. Tradler and M. Zeinalian, A Chen model for mapping spaces and the surface product Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **43** (2010), 811–881.

[GHT] A. Gómez-Tato, S. Halperin and D. Tanré, Rational homotopy theory for non-simply connected spaces, Transactions of AMS **352** (2000), 1493–1525.

[Gu] C. Guldberg, Labelled String Topology for Classifying Spaces of Compact Lie Groups: A 2-dimensional Homological Field Theory with D-branes, Thesis for the Master degree in Mathematics Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, 2011.

[HalL] S. Halperin and J. M. Lemaire, Notions of category in differential algebra, In: Algebraic Topology: Rational Homotopy, Springer Lecture Notes in Math. **1318**, Springer, Berlin, New York, 1988, 138–154.

[H] R. Hepworth, String topology for Lie groups, J. Topol. **3** (2010), 424–442.

[HL] R. Hepworth and A. Lahtinen, On string topology of classifying spaces, Adv. Math. **281** (2015), 394–507.

[IZ] P. Iglesias-Zemmour, Diffeology, Mathematical Surveys and Monographs, 185, AMS, Providence, 2012.

[Ir] K. Irie, A chain level Batalin-Vilkovisky structure in string topology via de Rham chains. Int. Math. Res. Not. IMRN **15** (2018), 4602–4674.

[II] N. Iwase and N. Izumida, Mayer–Vietoris sequence for differentiable/diffeological spaces, Algebraic Topology and Related Topics, Editors: M. Singh, Y. Song and J. Wu, Birkhäuser Basel (2019), 123–151.

[Ke] B. Keller, Deriving DG categories, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **27** (1994), 63–102.

[Ki] H. Kihara, Model category of diffeological spaces, J. Homotopy Relat. Struct. **14** (2018), 51–90.

[Ki20] H. Kihara, Smooth homotopy of infinite-dimensional C∞-manifolds, to appear in Memoirs of the AMS, 2020. arXiv:2002.03618.

[Ko] J. Kock, Frobenius algebras and 2D topological quantum field theories, No. 59 in London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[KK] A. Kono and K. Kuribayashi, Module derivations and cohomological splitting of adjoint bundles, Fund. Math. **180** (2003), 199–221.

[Kr] M. Kreck, Differential Algebraic Topology, From Stratifolds to Exotic Spheres, Graduate Studies in Math., 110, AMS, 2010.

[Kup] A.P.M. Kupers, String topology operations, M.Sc. thesis, Utrecht University, 2011.

[K11] K. Kuribayashi, The Hochschild cohomology ring of the singular cochain algebra of a space, Annales de l'Institut Fourier (Grenoble) **61** (2011), 1779–1805.

[K16] K. Kuribayashi, The ghost length and duality between chain and cochain type levels, Homology, Homotopy and Applications **18** (2016), 107–132.

[K20a] K. Kuribayashi, On the whistle cobordism operation in string topology of classifying spaces, Documenta Mathematica **25** (2020), 125-142.

[K20b] K. Kuribayashi, Simplicial cochain algebras for diffeological spaces, Indagationes Mathematicae, **31** (2020), 934-967.

[K20c] Kuribayashi, A comparison between two de Rham complexes in diffeology, preprint 2020. arXiv:2002.06802v2 [math.AT]

[栗林] 栗林 勝彦, 導来ストリングトポロジー—スペクトル系列および空間の代数的モデルからの考察—, 日本数学会 ' 数学 ' 71 巻 (2019), 225–251.

[KM] K. Kuribayashi and L. Menichi, The Batalin-Vilkovisky algebra in the string topology of classifying spaces, Canadian Journal of Math. **71** (2019), 843–889.

[KMN] K. Kuribayashi, L. Menichi and T. Naito, Derived string topology and the Eilenberg-Moore spectral sequence, Israel Journal of Math. **209** (2015), 745–802.

[LO] J. Latschev and A. Oancea, Free Loop Spaces in Geometry and Topology: Edited by Janko Latschev and Alexandru Oancea, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 24, 2015.

[LP] A.D. Lauda and H. Pfeiffer, Open-closed string: Two-dimensional extended TQFTs and Frobenius algebras, Topology and its Applications **155** (2008), 623–666.

[LUX] E. Lupercio, B. Uribe and M.A. Xicoténcatl, Orbifold string topology, Geom. Topol. **12** (2008), 2203–2247.

[M09a] L. Menichi, Batalin-Vilkovisky algebra structures on Hochschild cohomology, Bull. Soc. Math. France **137**(2009), 277–295.

[M09b] L Menichi, String topology for spheres, Comment. Math. Helv. **84** (2009) 135–157.

[MS] G.W. Moore and G. Segal, D-branes and K-theory in 2D topological field theory, preprint hep-th/0609042.

[Mo] S. Moriya, The de Rham homotopy theory and differential graded category, Math. Z. **271** (2012), 961–1010.

[Mu] A. Murillo, The virtual Spivak fiber, duality on fibrations and Gorenstein spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 3577–3587.

[Na] T. Naito, Computational examples of rational string operations on Gorenstein spaces. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **22** (2015), 543–558.

[NT] B. Ndombol and J.-C. Thomas, On the cohomology algebra of free loop spaces, Topology, **41** (2002), 85–106.

[SYH] K. Simakawa, K.Yoshida and T. Hraguchi, Homology and cohomology via enriched bifunctors, Kyushu Journal of Mathematics **72** (2018), 239–252.

[Tam] H. Tamanoi, Loop coproducts in string topology and triviality of higher genus TQFT operations. J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), 605–615.

[Wa1] S. Wakatsuki, Description and triviality of the loop products and coproducts for rational Gorenstein spaces, preprint 2016, arXiv:1612.03563

[Wa2] S. Wakatsuki, Coproducts in brane topology, Algebr. Geom. Topol. **19** (2019), 2961–2988.