

ディフェオロジーに付随する単体的微分代数と de Rham の定理

栗林 勝彦 (信州大学)*

1. はじめに

ディフェオロジカル空間 (diffeological space 以下, diff-空間) は 80 年代初頭 Souriau [10] により導入された可微分多様体の一般化であり, Chen の反復積分の理論に現れる Chen 空間の亜種と考えられる。diff-空間とその間の滑らかな写像がつくる圏 Diff は, 可微分多様体の圏 Mfd を含み (Mfd から Diff への埋め込みが存在し), 極限および余極限を持つカルテシアン閉圏となる。Diff の持つこうした豊かな性質から, diff-空間の微分同相群や自由ループ空間を含む写像空間, 等質空間, バンドルの概念 ([4]) も整備され, 近年では層理論的考察 ([1]), Quillen のモデル圏構造の導入 ([2, 6, 3]) およびディフェオロジカル・スタック ([9]) の研究も進んでいる。

多様体をホモトピー論的観点から考察する場合, 忘却関手経由で位相空間の圏内で考察し, 微分構造を反映した性質を捉えるという方法に加え, もし効果的にホモトピー論を Diff 上で展開できるならば, 無限次元を含む多様体を微分構造を保ったまま圏 Diff の中で直接考察できることになる。これらを実行するために Diff で初めに整備すべき枠組みは, de Rham 理論と思われるが, Souriau による diff-空間の微分形式に関しては de Rham の定理が **成立しない** (次章参照)。本講演では, 新しい de Rham 複体を導入し, 圏 Diff における de Rham 定理の定式化とその応用可能性について考察する。

2. ディフェオロジカル空間と Souriau による de Rham 複体

定義 2.1 集合 X 上のディフェオロジー \mathcal{D} とは, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して得られる n 次元のユークリッド空間 \mathbb{R}^n の開集合 U からの写像 $U \rightarrow X$ からなる集合で, 次の条件をみたす。

1. (Covering) 任意の n と開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して, 各定値写像 $U \rightarrow X$ は \mathcal{D} に属す。
2. (Compatibility) \mathcal{D} の元 $U \rightarrow X$ および開集合 $V \subset \mathbb{R}^m$ からの任意の C^∞ -写像 $V \rightarrow U$ に対して, 合成 $V \rightarrow U \rightarrow X$ は \mathcal{D} の元である。
3. (Locality) $U = \cup_i U_i$ を開被覆とする。写像 $p: U \rightarrow X$ の制限 $U_i \rightarrow X$ が \mathcal{D} の元ならば, $p: U \rightarrow X$ も \mathcal{D} の元である。

集合 X とディフェオロジー \mathcal{D} の組み (X, \mathcal{D}) をディフェオロジカル空間とい, \mathcal{D} の元を X のプロットと呼ぶ。また, diff-空間の射 $f: (X, \mathcal{D}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{D}^Y)$ (スムーズ写像) とは, 集合の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ で X のプロット p に対して, $f \circ p$ が Y のプロットになることである。

diff-空間 (X, \mathcal{D}^X) に対して, Souriau の de Rham 複体 $\Omega^*(X)$ は次のように定義される。

$$\Omega^p(X) := \left\{ \begin{array}{ccc} \text{Open}^{\text{op}} & \xrightarrow{\mathcal{D}^X} & \text{Sets} \\ & \Downarrow \omega & \\ & \wedge^p & \end{array} \middle| \omega : \text{自然変換} \right\},$$

ただし Open はユークリッド空間の開集合と可微分写像からなる圏であり, \mathbb{R}^n の開集合 U に対して, $\wedge^*(U) = \{h: U \rightarrow \wedge^*(\oplus_{i=1}^n \mathbb{R}dx_i) \mid h: \text{可微分写像}\}$ は通常 de Rham 複体, $\mathcal{D}^X(U)$ は U 上のプロット全体を意味する。 $\Omega^*(X)$ の微分代数構造は $\wedge^*(U)$ から誘導される。Iglesias-Zemmour [4] は立方体的特異単体で微分形式を引き戻し, 立方体的特異単体コチェイン複体へのコチェイン写像 $\int^{IZ}: \Omega^*(X) \rightarrow C_{\text{cube}}^*(X)$ を定義した。一般にこの写像は擬同型ではない。実際, 無理数トーラス $T_\theta^2 = \mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z})$, (θ は無理数) に商ディフェオロジーを入れて考える

キーワード: ディフェオロジカル空間, 単体的微分代数, de Rham の定理

* 〒390-8621 長野県松本市旭 3-1-1 信州大学 学術研究院 理学系 数理・自然情報科学領域

e-mail: kuri@math.shinshu-u.ac.jp

と、 $\Omega^*(T_\theta^2) \cong (\wedge^*(\mathbb{R}^1), d=0)$ であり $H^1(\Omega(T_\theta^2)) \cong \mathbb{R}^1$ となるが、Diff での Hurewicz の定理は $H^1(C_{\text{cube}}^*(T_\theta^2)) \cong \mathbb{R}^2$ を導く。 T_θ^2 の商位相は自明であるため、位相空間の圏ではその性質を十分に捉えることはできないことに注意する。

3. Diff における de Rham の定理と展望

単体的微分代数をいくつか用意する。 $\mathbb{A}^n := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1\}$ をユークリッド空間 \mathbb{R}^{n+1} の部分ディフェオロジーを持ったアフィン空間、 Δ_{sub}^n をその部分 diff-空間で基礎集合が n 単体 Δ^n であるものとする。単体的微分代数 $(A_{DR}^*)_\bullet$ を各 $n \geq 0$ に対して $(A_{DR}^*)_n := \Omega^*(\mathbb{A}^n)$ で定義する。さらに単体的集合 $S_\bullet^D(X) := \{\{\sigma : \mathbb{A}^n \rightarrow X \mid \sigma : C^\infty\text{-写像}\}\}_{n \geq 0}$ と $S_\bullet^D(X)_{\text{sub}} := \{\{\sigma : \Delta_{\text{sub}}^n \rightarrow X \mid \sigma : C^\infty\text{-写像}\}\}_{n \geq 0}$ を用意する。また、単体的微分代数 $(C_{PL}^*)_\bullet := C^*(\Delta[\bullet])$ を考える。ただし $\Delta[n] = \text{hom}_\Delta(-, [n])$ は標準 n 単体的集合である。単体的微分代数 A_\bullet と単体的集合 K に対して、微分代数 $A(K)$ を単体的集合の圏 $\text{Sets}^{\Delta^{\text{op}}}$ の Hom 集合を用いて $A(K) := \text{Sets}^{\Delta^{\text{op}}}(K, A_\bullet)$ と定める。新しい de Rham 複体として $A_{DR}^*(S_\bullet^D(X))$ を選ぶ。このとき、2つの de Rham 複体をつなぐ微分代数の射 $\alpha : \Omega^*(X) \rightarrow A_{DR}^*(S_\bullet^D(X))$ を $\alpha(\omega)(\sigma) = \sigma^*(\omega)$ と定義する。次が本講演の主定理となる。

定理 3.1 ([8, Theorem 2.4])(cf. [5, Theorem 9.7]) diff-空間 (X, \mathcal{D}) に対して、微分代数の擬同型写像 φ と ψ および微分加群の射 f が存在して、次はホモトピー可換図式となる：

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^*(S_\bullet^D(X)_{\text{sub}}) & \xrightarrow[\varphi]{\cong} & (C_{PL}^* \otimes A_{DR}^*)(S_\bullet^D(X)) & \xleftarrow[\psi]{\cong} & A_{DR}^*(S_\bullet^D(X)) & \xleftarrow{\alpha} & \Omega^*(X) \\
 & \searrow = & \downarrow \text{mult} \circ (1 \otimes f) & \swarrow \text{an "integration" } f & & \swarrow f^{IZ} & \\
 & & C^*(S_\bullet^D(X)_{\text{sub}}) & \xleftarrow[\cong]{l} & C_{\text{cube}}^*(X) & &
 \end{array}$$

ただし、 mult は C_{PL}^* の微分代数 $C^*(S_\bullet^D(X)_{\text{sub}})$ への作用を表す。さらに、 (X, \mathcal{D}) が岩瀬-泉田の意味のスムーズ CW-複体 [5] または p -階層体 (p -stratifold) [7] ならば α は擬同型写像となる。

結果として、積分写像 f はコホモロジー上に環同型を f^{IZ} はコホモロジー上に環準同型写像を誘導する。非輪状モデルの方法の利用やディフェオロジーの意味でのスムーズ拡張性を検証することで証明は完成する。今後、新 de Rham 複体による Leray-Serre, Eilenberg-Moore スペクトル系列の構築、さらには diff-空間の Sullivan モデルの利用により、可微分、位相的、ディフェオロジカル・スタックの de Rham ホモトピー論の展開が期待される。

参考文献

- [1] J.C. Baez and A.E. Hoffnung, Convenient categories of smooth spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), 5789–5825.
- [2] J.D. Christensen and E. Wu, The homotopy theory of diffeological spaces, *New York J. Math.* **20** (2014), 1269–1303.
- [3] T. Haraguchi and K. Shimakawa, A model structure on the category of diffeological spaces, preprint (2018). [arXiv:1311.5668v7](https://arxiv.org/abs/1311.5668v7)[math.AT]
- [4] P. Iglesias-Zemmour, *Diffeology*, Math. Surveys and Monographs, 185, AMS, Providence, 2012.
- [5] N. Iwase and N. Izumida, Mayer-Vietoris sequence for differentiable/diffeological spaces, *Algebraic Topology and Related Topics*, Birkhäuser Basel (2019), 123–151.
- [6] H. Kihara, Model category of diffeological spaces, to appear in *H. J. Homotopy Relat. Struct.* (2018). <https://doi.org/10.1007/s40062-018-0209-3>.
- [7] M. Kreck, *Differential Algebraic Topology, From Stratifolds to Exotic Spheres*, Graduate Studies in Math., 110, AMS, 2010.
- [8] K. Kuribayashi, Simplicial cochain algebras for diffeological spaces, preprint. [arXiv:1902.10937v4](https://arxiv.org/abs/1902.10937v4)
- [9] D.M. Roberts and R.F. Vozzo, Smooth loop stacks of differentiable stacks and gerbes, preprint. [arXiv:1602.07973v3](https://arxiv.org/abs/1602.07973v3)
- [10] J.-M. Souriau, *Groupes différentiels*, Lecture Notes in Math., **836**, Springer, 1980, 91–128.