擬スキーモイドの Mitchell 埋め込み定理について

栗林 勝彦　(信州大学)*1
百瀬 康弘　(信州大学大学院 総合工学系研究科)*2

1. スキーモイドとは

代数的組合せ論において重要な研究対象であるアソシエーション・スキーム (AS) を圏論的な枠組みで捉え, 一般化したものが (擬) スキーモイドである。小圏の射全体の集合に彩色を行い, そこに適切な組合せ論的条件を課したものと考えられる。

スキーモイドの概念は近年 [1] で導入され, 亜群の圏や花木章秀氏による AS の圏からスキーモイドの圏への自然な関手の存在や, スキーモイドの構成法, 拡大が現在までに考察されている。また小圏のホモトピー論を用いて, 論文 [2] では擬スキーモイドのホモトピー論も展開されている。本講演では擬スキーモイドに関して, 圏論的表現論, ホモロジー代数を展開するための枠組みを [3] に沿って紹介すると共に, 擬スキーモイドに関する森田同値の概念を導入する。

定義 1.1 $\mathcal{C}$ を小圏, すなわち $\mathcal{C}$ の対象全体がつくる類が集合であるとする。$S := \{\sigma_l\}_{l\in I}$ を $\mathcal{C}$ の射全体がつくる集合 $mor(\mathcal{C})$ の分割 (彩色) $mor(\mathcal{C}) = \coprod_{i\in I}\sigma_i$ であるとする。次の条件をみたすとき, 圏 $\mathcal{C}$ と分割 S の対 $(\mathcal{C}, S)$ を**擬スキーモイド**と呼ぶ：任意の $\sigma, \tau, \mu \in S$ と μ の任意の射 f, g に対して, 集合としての同型

$$(\pi^{\mu}_{\sigma\tau})^{-1}(f) \cong (\pi^{\mu}_{\sigma\tau})^{-1}(g),$$

が成り立つ。ただし, $\pi^{\mu}_{\sigma\tau} : \pi^{-1}_{\sigma\tau}(\mu) \to \mu$ は結合写像

$$\pi_{\sigma\tau} : \sigma \times_{ob(\mathcal{C})} \tau := \{(u, v) \in \sigma \times \tau \mid s(u) = t(v)\} \to mor(\mathcal{C})$$

を制限して定義される写像を表している。以下 $(\pi^{\mu}_{\sigma\tau})^{-1}(f)$ の濃度を $p^{\mu}_{\sigma\tau}$ と表す。また f, g に対して $\sigma \in S$ が存在して, $f, g \in \sigma$ みたすとき, $f \sim_S g$ と書く。

定義 1.2 (i) $(\mathcal{C}, S)$ と $(\mathcal{E}, S')$ を擬スキーモイドとする。関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ が彩色を保つ, すなわち任意の $\sigma \in S$ に対して $\tau \in S'$ が存在して, $F(\sigma) \subset \tau$ をみたすとき F を**擬スキーモイドの射**といい $F : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{E}, S')$ と表す。
(ii) $(\mathcal{C}, S)$ を擬スキーモイドとする。$\mathbb{K}$ 上ベクトル空間のなす圏 $\mathcal{T}$ から得られる関手圏 $\mathcal{T}^{\mathcal{C}}$ の部分圏で次をみたすものを $\mathcal{T}^{(\mathcal{C},S)}$ と表し, **擬スキーモイドの関手圏**と呼ぶ：対象は関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{T}$ で $f \sim_S g$ ならば $F(f) = F(g)$ をみたす。さらに射 $\eta : F \Rightarrow G$ は自然変換であり, $id_x \sim_S id_y$ ならば $\eta_x = \eta_y$ をみたす。

qASmd, Gr, Gpd, AS, Cat, をそれぞれ, 擬スキーモイド, 群, 亜群, AS, 小圏の圏とすると, 次の関手, 可換図式が存在する。(関手の説明, より大きな関手の可換図式に関しては [1, (6.1)] 参照) また Gpd と AS は, $\widetilde{S}(\ )$ と $\jmath$ を用いて qASmd の適切な部分圏にそれぞれ埋め込まれる。

(1.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Gpd} \arrow[r, "\widetilde{S}(\ )"] & q\mathsf{ASmd} \arrow[r, shift left, "U"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathsf{Cat}, \arrow[l, shift left, "\mathcal{K}"] \\
\mathsf{Gr} \arrow[u, "\imath"] \arrow[r, "S(\ )"] & \mathsf{AS} \arrow[u, "\jmath"']
\end{tikzcd}$$

本研究は科研費 (課題番号:25610002) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 05E30, 16D90, 18D35, 18E30
キーワード：スキーモイド, 小圏, Mitchell 埋め込み定理, 森田同値
*1 〒390-8621 長野県松本市旭 3-1-1 信州大学 学術研究院 理学系 数理・自然情報科学領域
e-mail: kuri@math.shinshu-u.ac.jp
web: http://marine.shinshu-u.ac.jp/~kuri/home.html
*2 e-mail: momose@math.shinshu-u.ac.jp

ASから行列環の部分環としてBose-Mesner代数が定義されるが, 擬スキーモイド$(\mathcal{C}, S)$の基礎圏$\mathcal{C}$の対象が有限集合である場合は同様に, 圏代数$\mathbb{K}(\mathcal{C})$の部分環として, 上述の$p^{\mu}_{\sigma\tau}$を構造定数として持つ**Bose-Mesner 代数** $\mathbb{K}(\mathcal{C}, S)$ が定義される。したがって, Bose-Mesner代数上の加群圏 $\mathbb{K}(\mathcal{C}, S)$-Modは表現論の舞台になりうる。しかし上述の定義1.2 (i)で定義した擬スキーモイドの射は, 自然にはBose-Mesner代数の環準同型を誘導しない。そこで, ここでは圏代数$\mathbb{K}(\mathcal{C})$の「もう一つ」の表現である関手圏および擬スキーモイドの関手圏に注目する。

2. 擬スキーモイドのMitchell埋め込み定理と森田同値

定理 2.1 基礎圏$\mathcal{D}$の対象がつくる集合が有限である場合、**従順スキーモイド**$(\mathcal{D}, S')$に関してはMitchell埋め込み定理が成立する。すなわち圏同値$\mathcal{T}^{(\mathcal{D},S')} \simeq \mathbb{K}(\mathcal{D}, S')$-Modが成立する。

定理 2.2 擬スキーモイド$(\mathcal{C}, S)$から従順スキーモイド$(\mathcal{D}, S')$への射$u : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, S')$から誘導される関手$u^* : \mathcal{T}^{(\mathcal{D},S')} \to \mathcal{T}^{(\mathcal{C},S)}$に対して, 左随伴$\mathrm{Lan}_u : \mathcal{T}^{(\mathcal{C},S)} \to \mathcal{T}^{(\mathcal{D},S')}$および右随伴$\mathrm{Ran}_u : \mathcal{T}^{(\mathcal{C},S)} \to \mathcal{T}^{(\mathcal{D},S')}$が存在する。したがって, チェイン複体の圏の間の右, 左随伴を得る。

$$\begin{tikzcd} Ch(\mathcal{T}^{(\mathcal{D},S')}) \arrow[r, "u^*"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\perp"] & Ch(\mathcal{T}^{(\mathcal{C},S)}) \arrow[l, bend right, "\mathrm{Lan}_u"'] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Ran}_u"] \end{tikzcd}$$

定理2.2 を利用して, 擬スキーモイドの関手圏のチェイン複体がつくる圏にQuillenモデル圏構造を導入することができる。こうして関手圏$\mathcal{T}^{(\mathcal{C},S)}$上でホモロジー代数が展開できる。

定理 2.3 上の記号のもと, $\mathcal{C}$の対象がつくる集合は有限であると仮定する。このとき弱同値がRan_uにより$Ch(\mathcal{T}^{(\mathcal{D},S')}) \simeq Ch(\mathbb{K}(\mathcal{D}, S')\text{-Mod})$の弱同値に写される射として定義されるコファイブラント生成モデル圏構造が$Ch(\mathcal{T}^{(\mathcal{C},S)})$に入る。さらに$(u^*, \mathrm{Ran}_u)$はこのモデル圏構造に関して, Quillen 対となる。

定義 2.4 スキーモイドの関手圏$\mathcal{T}^{(\mathcal{C},S_{\mathcal{C}})}$ と $\mathcal{T}^{(\mathcal{C}',S_{\mathcal{C}'})}$が圏同値であるとき, 擬スキーモイド$(\mathcal{C}, S_{\mathcal{C}})$と$(\mathcal{C}', S_{\mathcal{C}'})$は**森田同値**であるという。

群から得られるASと一般にそうではないASが擬スキーモイドの中で関連づけられる。

命題 2.5 長さ2のバイナリーコードがつくるハミング・スキーム$H(n, 2)$から図式(1.1)における関手を経て得られる擬スキーモイド$\jmath(H(n, 2))$と群$\mathbb{Z}/2$から得られる擬スキーモイド$\widetilde{S}(\mathbb{Z}/2)$は森田同値である。

定理 2.3を利用して, 擬スキーモイドの森田同値に関する不変量であるHochschildコホモロジー型関手を手に入れることができる。

定理 2.6 擬スキーモイドの射$u : (\mathcal{C}_1, S_1) \to (\mathcal{C}_2, S_2)$, $w : (\mathcal{C}_1, S_1) \to (\mathcal{D}, S')$, $w' : (\mathcal{C}_2, S_2) \to (\mathcal{D}, S')$が$w'u = w$をみたし, さらに$(\mathcal{D}, S')$を従順と仮定する。 もし$u$が$(C_1, S_2)$と$(C_2, S_2)$の森田同値を誘導するならば, $\mathcal{T}^{(\mathcal{D}^{op}\times\mathcal{D}, S'\times S')}$の任意の対象$h$に対して, 次の同型が成立する。

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{T}^{(\mathcal{D}^{op}\times\mathcal{C}_1, S'\times S_1)}}((1 \times w)^* h, (1 \times w)^* h) \cong \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{T}^{(\mathcal{D}^{op}\times\mathcal{C}_2, S'\times S_2)}}((1 \times w')^* h, (1 \times w')^* h).$$

参考文献

[1] K. Kuribayashi and K. Matsuo, Association schemoids and their categories, Applied Categorical Structures, **23** (2015), 107-136.

[2] K. Kuribayashi, On strong homotopy for quasi-schemoids, Theory and Applications of Categories, **30** (2015), 1-14.

[3] K. Kuribayashi and Y. Momose, On Mitchell's embedding theorem for a quasi-schemoid, preprint. `arXiv:1507.01745v2`.