

# 擬スキーマイドの強ホモトピー

栗林 勝彦 (信州大学)\*

## 1. スキーマイドとは

代数的組合せ論において重要な対象であるアソシエーションスキーム (AS) は, Zieschang [7] 等により有限群の一般化としての側面も強調され研究されている。特に AS の隣接代数を經由して指標理論さらに, 有限次元代数の表現論的考察や道具も用いられその研究が進められている。ごく最近では花木, French によりそれぞれ異なる AS の圏が定義され ([1], [3]), AS の大局的な振る舞いも考察されてきた。本研究はこのように近年生じている研究の潮流を捉え, 「圏論的, ホモトピー論的側面から AS の研究に現れる様々な概念を小圏の研究を通して一般化し, 興味ある研究対象を生み出す」ことを目指している。この一般化により AS 的概念の適用・応用範囲が広がるのが大いに期待される。本講演では有限群, AS そして亜群をも含むスキーマイドの概念を提案 ([5]) し, その上のホモトピー関係を考察する。

まず私たちが導入するスキーマイドとの比較のために, AS の定義を思い出す。

有限集合  $X$  と直積集合  $X \times X$  の分割  $S$ , すなわち巾集合  $2^{X \times X}$  の部分集合であり  $X \times X = \coprod_{\sigma \in S} \sigma$  をみたすものを考える。また  $g \in S$  に対して

$$g^* := \{(y, x) \mid (x, y) \in g\}$$

とおき, 対角写像  $\{(x, x) \mid x \in X\}$  を  $1_X$  で表す。分割  $S$  が次の 3 条件をみたすとき組  $(X, S)$  を **アソシエーションスキーム** (以下 AS) という。

- (1)  $1_X \in S$ ,
- (2)  $g \in S$  に対して  $g^* \in S$ ,
- (3) 任意の  $e, f, g \in S$  に対して非負の整数  $p_{ef}^g$  が定まり, 任意の  $(x, z) \in g$  に対して

$$p_{ef}^g = \#\{y \in X \mid (x, y) \in e \text{ かつ } (y, z) \in f\}.$$

ここで  $p_{ef}^g$  は元  $(x, z) \in g$  の取り方に無関係に定まる非負整数であることに注意する。

例えば, 有限群  $G$  を考えるとき  $[G] := \{G_h\}$ ,  $G_h := \{(k, l) \in G \times G \mid k^{-1}l = h\}$  と定義すると  $(G, [G])$  は  $p_{G_f G_g}^{G_{fg}} = 1$ ,  $h \neq fg$  のとき  $p_{G_f G_g}^{G_h} = 0$  となり AS となる。

上記 (3) の条件を圏論的な条件に書き換えることで, 擬スキーマイドが定義される。以後, 圏  $\mathcal{C}$  の射  $u: x \rightarrow y$  に対して  $x = s(u)$ ,  $y = t(u)$  と表す場合がある。

**定義 1.1**  $\mathcal{C}$  を小圏, すなわち  $\mathcal{C}$  の対象全体がつくる類が集合であるとする。  $S := \{\sigma_l\}_{l \in I}$  を  $\mathcal{C}$  の射全体がつくる集合  $\text{mor}(\mathcal{C})$  の分割であるとする。次の条件をみたすとき, 圏  $\mathcal{C}$  と分割の対  $(\mathcal{C}, S)$  を **擬スキーマイド** (quasi-schemoid) と呼ぶ。 ( $\mathcal{C}$  をこの擬スキーマイドの基礎圏と呼ぶ。)

任意の  $\sigma, \tau, \mu \in S$  と  $\mu$  の任意の射  $f, g$  に対して, 集合としての同型

$$(\pi_{\sigma\tau}^\mu)^{-1}(f) \cong (\pi_{\sigma\tau}^\mu)^{-1}(g),$$

が成り立つ。ただし,  $\pi_{\sigma\tau}^\mu: \pi_{\sigma\tau}^{-1}(\mu) \rightarrow \mu$  は結合写像

$$\pi_{\sigma\tau}: \sigma \times_{\text{ob}(\mathcal{C})} \tau := \{(u, v) \in \sigma \times \tau \mid s(u) = t(v)\} \rightarrow \text{mor}(\mathcal{C})$$

を制限して定義される写像を表している。以下  $(\pi_{\sigma\tau}^\mu)^{-1}(f)$  の濃度を  $p_{\sigma\tau}^\mu$  と表す。

本研究は科研費 (課題番号:25610002) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 18D35, 05E30, 55U35

キーワード: スキーマイド, ホモトピー, 小圏

\* 〒 390-8621 長野県松本市旭 3-1-1 信州大学 学術研究院 理学系 数理・自然情報科学領域

e-mail: kuri@math.shinshu-u.ac.jp

web: <http://marine.shinshu-u.ac.jp/~kuri/home.html>

擬スキーマイドに AS の定義の条件 (1) と (2) を一般化したものを付加してスキーマイドを定義する。

**定義 1.2** 擬スキーマイド  $(\mathcal{C}, S)$  が次の 2 条件をみたすとき **アソシエーションスキーマイド** (スキーマイド (schemoid)) という<sup>1</sup>。

- (i) 任意の  $\sigma \in S$  と集合  $J := \coprod_{x \in \text{ob}(\mathcal{C})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$  に対して、もし  $\sigma \cap J \neq \emptyset$  ならば  $\sigma \subset J$ 。
- (ii) 反変関手  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  で  $T^2 = \text{id}_{\mathcal{C}}$  をみたすものが存在する。さらに任意の  $\sigma \in S$  に対して

$$\sigma^* := \{T(f) \mid f \in \sigma\}$$

は  $S$  に属する。反変関手  $T$  を持つこのスキーマイドを  $(\mathcal{C}, S, T)$  と表す。

**例 1.3** (i) (離散的スキーマイド)  $\mathcal{C}$  を小圏とし  $\text{mor}(\mathcal{C})$  の分割  $S$  を  $S = \{\{f\}\}_{f \in \text{mor}(\mathcal{C})}$  で与えるとき、対  $K(\mathcal{C}) := (\mathcal{C}, S)$  は擬スキーマイドとなる。こうして小圏から自然に擬スキーマイドが得られる。

(ii) (シューアスキーマイド)  $G$  を (有限とは限らない) 群とする。  $G$  を一つの対象  $\bullet$  のみをもち、射の集合が  $G$  である亜群と考える。  $G$ -圏  $\mathcal{D}$ 、すなわち関手  $F : G \rightarrow \text{Cat}$  が存在して  $\mathcal{D} = F(\bullet)$  となる圏  $\mathcal{D}$  を考える。このとき集合  $\text{mor}(\mathcal{D})$  の  $G$  による軌道全体がつくる集合を  $S$  とするとき、  $(\mathcal{D}, S)$  は擬スキーマイドとなる。実際これはシューアの AS が (3) の条件をみたすことを確かめる場合と同じように示せる。

例えば、  $\mathcal{D}$  が次の図式で与えられる小圏であり、  $\mathbb{Z}/2$  は  $a$  を  $b$  に  $1_x, 1_y$  は変えずに  $\mathcal{D}$  に作用しているとする。

$$1_x \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} x \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} y \begin{array}{c} \text{---} y \\ \curvearrowleft \\ 1_y \end{array} \quad \curvearrowright \mathbb{Z}/2$$

このとき擬スキーマイド  $(\mathcal{C}, \{\{1_x, 1_y\}, \{a, b\}\})$  を得る。

(iii) (スキーマイドの積)  $(\mathcal{C}, S)$  と  $(\mathcal{E}, S')$  を擬スキーマイドとする。このとき、  $(\mathcal{C} \times \mathcal{E}, S'')$ 、  $S'' := \{\sigma \times \tau \mid \sigma \in S, \tau \in S'\}$  は擬スキーマイドである。

(iv) (AS からの構成) アソシエーションスキーム  $(X, S)$  を考える。このとき小圏  $\mathcal{C}$  を  $\text{ob}(\mathcal{C}) = X$ 、  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x) = \{(x, y)\} \subset X \times X$ 、合成を  $(z, x) \circ (x, y) = (z, y)$  と定義する。このとき  $U = S$ 、反変関手  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  を  $T(x) = x$ 、  $T(x, y) = (y, x)$  で定義すると、  $j(X, S) := (\mathcal{C}, U, T)$  はスキーマイドとなる。

(v) (亜群からの構成)  $\mathcal{H}$  を亜群とする。小圏  $\tilde{\mathcal{H}}$  を  $\text{ob}(\tilde{\mathcal{H}}) := \text{mor}(\mathcal{H})$ 、そして射に関しては

$$\text{Hom}_{\tilde{\mathcal{H}}}(g, h) = \begin{cases} \{(h, g)\} & \text{if } t(h) = t(g) \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定義する。さらに  $\text{mor}(\tilde{\mathcal{H}})$  の分割  $S = \{\mathcal{G}_f\}_{f \in \text{mor}(\mathcal{H})}$  を  $\mathcal{G}_f = \{(k, l) \mid k^{-1}l = f\}$ 、反変関手を  $(f, g) \in \text{mor}(\tilde{\mathcal{H}})$  に対して  $T((f, g)) = (g, f)$  と定義する。このとき  $\tilde{S}(\mathcal{H}) := (\tilde{\mathcal{H}}, S, T)$  はスキーマイドとなる。これは群  $G$  から得られるアソシエーションスキーム  $S(G)$  の場合と同様に確かめられる。

**定義 1.4** (i)  $(\mathcal{C}, S)$  と  $(\mathcal{E}, S')$  を擬スキーマイドとする。このとき関手  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$  が任意の  $\sigma \in S$  に対して  $\tau \in S'$  が存在して  $F(\sigma) \subset \tau$  をみたすとき  $F$  を擬スキーマイドの射といい  $F : (\mathcal{C}, S) \rightarrow (\mathcal{E}, S')$  と表す。

(ii)  $(\mathcal{C}, S, T)$  と  $(\mathcal{E}, S', T')$  をスキーマイド、  $F : (\mathcal{C}, S) \rightarrow (\mathcal{E}, S')$  を擬スキーマイドの射とする。  $FT = T'F$  をみたすとき  $F : (\mathcal{C}, S, T) \rightarrow (\mathcal{E}, S', T')$  と表して、  $F$  をスキーマイドの射と呼ぶ。

擬スキーマイドの圏、スキーマイドの圏を以下それぞれ  $q\text{ASmd}$ 、  $\text{ASmd}$  と表す。

<sup>1</sup> この定義からスキーマイドは実際、coherent configuration の一般化になっていることがわかる。

## 2. スキーモイドの間の強ホモトピー関係

[1] を 2 つの対象  $0, 1$  と非自明な射  $u : 0 \rightarrow 1$  のみをもつ小圏とする。このとき  $I$  を [1] から定まる離散的スキーモイド  $K([1])$  とする。

**定義 2.1** 擬スキーモイドの間の射  $F, G : (\mathcal{C}, S) \rightarrow (\mathcal{D}, S')$  に対して,  $qASmd$  上の射

$$H : (\mathcal{C}, S) \times I \rightarrow (\mathcal{D}, S')$$

で  $H \circ \varepsilon_0 = F$  and  $H \circ \varepsilon_1 = G$  をみたすものが存在するとき,  $H : F \Rightarrow G$  と表す。ただし,  $\varepsilon_i : (\mathcal{C}, S) \rightarrow (\mathcal{C}, S) \times I$  は  $\varepsilon_i(a) = (a, i)$ ,  $\varepsilon_i(f) = (f, 1_i)$  で与えられる。  $H$  を  $F$  から  $G$  への**ホモトピー**という。

$qASmd$  上にある射  $H : (\mathcal{C}, S) \times I \rightarrow (\mathcal{D}, S')$  が存在して,  $H : F \Rightarrow G$  または  $H : G \Rightarrow F$  が成り立つとき,  $F$  は  $G$  に同値であるといい  $F \sim G$  と表す。

**注意 2.2**  $H : (\mathcal{C}, S) \times I \rightarrow (\mathcal{D}, S')$  を  $F$  から  $G$  へのホモトピーとする。このとき任意の射  $f \in mor(\mathcal{C})$  に対して, 基礎圏  $\mathcal{D}$  における次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} H(s(f), 0) & \xrightarrow{H(1_{s(f)}, u)} & H(s(f), 1) \\ F(f)=H(f, 1_0) \downarrow & \searrow^{H(f, u)} & \downarrow H(f, 1_1)=G(f) \\ H(t(f), 0) & \xrightarrow{H(1_{t(f)}, u)} & H(t(f), 1) \end{array}$$

$H$  が擬スキーモイドの射であることから次の事が従う。

(1)  $f$  と  $g$  が  $S$  の同じ元 (分割) に属するならば,  $H(f, u)$  と別の四角図式の対角にある  $H(g, u)$  は  $S'$  の同じ元 (分割) に属す。

(2) 与えられた  $\mathcal{C}$  の射  $f$  に対して, それが定める上の四角図式において,  $1_{s(f)}$  と  $1_{t(f)}$  が  $S$  の同じ元 (分割) に属するならば,  $H(1_{s(f)}, u)$  と  $H(1_{t(f)}, u)$  は  $S'$  の同じ元 (分割) に属す。

**定義 2.3 (ホモトピー関係)**  $(\mathcal{C}, S)$  と  $(\mathcal{D}, S')$  を擬スキーモイドとする。射  $F, G : (\mathcal{C}, S) \rightarrow (\mathcal{D}, S')$  に対して,  $F$  が  $G$  にホモトピック ( $F \simeq G$  と表す) とは, 射の有限列

$$F = F_0, F_1, \dots, F_n = G$$

が存在して,  $F_k \sim F_{k+1}$ ,  $k = 0, \dots, n$  をみたすことである。

**定義 2.4** 擬スキーモイド  $(\mathcal{C}, S)$  に対して,  $qASmd$  における自己ホモトピー同値射全体がつくるモノイドを  $aut((\mathcal{C}, S))$  と表す。このとき,

$$haut((\mathcal{C}, S)) := aut((\mathcal{C}, S)) / \simeq .$$

と定義する。

**命題 2.5** 自己ホモトピー同値射集合  $aut((\mathcal{C}, S))$  におけるモノイド構造は  $haut((\mathcal{C}, S))$  の群構造を誘導する。さらに  $haut((\mathcal{C}, S))$  は擬スキーモイドのホモトピー不変量となる。

擬スキーモイド  $(\mathcal{C}, S)$  に対して, 自己同型関手のホモトピー類がつくる群を  $hAut((\mathcal{C}, S))$  と表す時, 自然な写像  $\eta_{(\mathcal{C}, S)} : hAut((\mathcal{C}, S)) \rightarrow haut((\mathcal{C}, S))$  が定義される。また亜群  $\mathcal{G}$  に対し,  $\mathcal{G}$  の自己同型関手がつくる群を  $Aut(\mathcal{G})$  と表す。

注意 2.2 における (1)(2) により, スキーモイドの分割は構成できるホモトピーにかなりの制限を与える。このことから次の定理を得る。

**定理 2.6** ([4])  $\mathcal{G}$  を有限とは限らない亜群とする。このとき、関手  $\tilde{S}(\ )$  (例 1.3(v) 参照) は次の可換図式を与える。

$$\begin{array}{ccc} & & \text{haut}(\tilde{S}(\mathcal{G})) \\ & \nearrow^{\tilde{S}_{*1}} & \uparrow^{\eta_{\tilde{S}(\mathcal{G})}} \\ \text{Aut}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\tilde{S}_{*2}} & \text{hAut}(\tilde{S}(\mathcal{G})) \end{array}$$

ここで  $\tilde{S}_{*1}$  は単射となる。さらに、 $\mathcal{G}$  が有限ならば、 $\tilde{S}_{*2}$  は同型射となる。

亜群  $\mathcal{G}$  が有限であるとき、その上の自己同型はホモトピー関係により”潰れない”ことを定理 2.6 は示している。

**定理 2.7** ([4]) 圏  $q\text{ASmd}$  には 2-圏構造が入り、小圏に離散的スキームを対応させる関手  $K : \text{Cat} \rightarrow q\text{ASmd}$  は 2-圏の間の充満忠実埋め込みをあたえる。

既知の事実及び今まで述べた圏と関手についてまとめると次の図式を得る。詳細は [5] 参照。

(2.1)

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Gpd} & \xleftarrow{\tilde{R}} & (t\text{ASmd})_0 & \xrightarrow{\quad} & \text{ASmd} & \xrightarrow{k} & q\text{ASmd} & \xrightarrow{U} & \text{Cat} & \xrightarrow{N(\ )} & \text{Set}^{\Delta^{op}} & \xleftarrow{S_*(\ )} & \text{Top} \\ \uparrow^{i'} & \xrightarrow{\tilde{S}(\ )} & \uparrow & \xrightarrow{\tilde{S}(\ )} & \uparrow & \xrightarrow{j} & \downarrow & \xrightarrow{\mathbb{K}(\ )} & \downarrow & \xrightarrow{\mathbb{K}(\ )} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Gpd}' & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{B} & \xrightarrow{\quad} & \text{AS} & \xrightarrow{\quad} & \text{Alg} & \xrightarrow{\quad} & \text{Alg} & \xrightarrow{\quad} & \text{Alg} & \xrightarrow{\quad} & \text{Alg} \\ \uparrow^i & \xrightarrow{S(\ )} & \uparrow & \xrightarrow{j_S} & \uparrow & \xrightarrow{\quad} & \downarrow & \xrightarrow{\mathbb{A}(\ )} & \downarrow & \xrightarrow{\mathbb{A}(\ )} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Gr} & \xrightarrow{\simeq} & (t\text{AS})_0 & \xrightarrow{\quad} & \text{AS} & \xrightarrow{\quad} & \text{Alg} & \xrightarrow{\quad} & \text{Alg} & \xrightarrow{\quad} & \text{Alg} & \xrightarrow{\quad} & \text{Alg} \\ & \searrow^{S(\ )} & \downarrow & \xrightarrow{j_S} & \downarrow & \xrightarrow{\mathbb{A}(\ )} & \downarrow & \xrightarrow{\mathbb{A}(\ )} & \downarrow & \xrightarrow{\mathbb{A}(\ )} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & \mathcal{S} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{S} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{S} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{S} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{S} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{S} \end{array}$$

ただし、 $\text{AS}$ ,  $\mathcal{S}$  はそれぞれ、花木, French の圏, 波矢印は Bose-Mesner 代数をつくる対象上の対応を意味する。また  $K$  と垂直方向の矢印  $j, j_S, j_{(t\text{AS})_0}$  は充満忠実関手である。射  $N(\ )$  と  $c$  は、それぞれナーブ構成関手と圏化関手 ([2]) を意味している。さらに  $\parallel, S_*(\ )$  は実現関手, 特異単体集合を与える関手である。平行ライン上に表されている関手は、下の射が上の射の左随伴であることを注意する。狭義には関手  $\tilde{S}(\ ) : \text{Gpd}' \rightarrow \mathcal{B}$  と  $q\text{ASmd}$  から  $\text{Alg}$  への対応  $\mathbb{K}(\ )$  はそれぞれ有限亜群の圏と有限擬スキームの圏に制限されるべきである。ここで、 $\text{Gpd}'$  は対象上で単射となる射に制限してえられる、 $\text{Gpd}$  の部分圏である。

(2.1) の右上段に位置する 3 つの圏  $\text{Cat}$ ,  $\text{Set}^{\Delta^{op}}$  (単体的集合の圏) そして  $\text{Top}$  (位相空間の圏) を考える。Thomason ([6]) の結果から それらのホモトピー圏は上の図式上に置かれている関手  $N(\ )$ ,  $S_*(\ )$  により同値になる。定理 2.7 によりある意味、擬スキームは “位相空間の一般化” とも言えよう。このように  $q\text{ASmd}$  におけるホモトピー論を展開することは重要な意味を持つ。

## 参考文献

- [1] C. French, Functors from association schemes, J. Combin. Theory Ser. A **120** (2013), 1141-1165.
- [2] P. Gabriel and M. Zisman, Calculus of fractions and homotopy theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35 Springer-Verlag New York, Inc., New York 1967.
- [3] A. Hanaki, A category of association schemes, J. Combin. Theory Ser. A **117** (2010), 1207-1217.
- [4] K. Kuribayashi, On the strong homotopy for quasi-schemoids, preprint, 2013. [arXiv:1310.1736 math.CT](https://arxiv.org/abs/1310.1736).
- [5] K. Kuribayashi and K. Matsuo, Association schemoids and their categories, to appear in Applied Categorical Structures, preprint (2013). [arXiv:1304.6883 math.CT](https://arxiv.org/abs/1304.6883).
- [6] R. W. Thomason, Cat as a closed model category, Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, **21**(1980), 305-324.
- [7] P. -H. Zieschang, Theory of association schemes, Springer Monographs in Math., Springer-Verlag, Berlin, 2005.