階層体の圏とSerre-Swanの定理

栗林 勝彦 (信州大学)*1
青木 稔樹

1. はじめに

階層体 (Stratifold) とはKreck [2] により導入された多様体の一般化概念であり，孤立特異点を持つ代数多様体，多様体の開錐や接着空間を含む大きなクラスをつくる。可微分多様体を環付き空間とみなすとき，その上のベクトル束がつくる圏が大域切断上の有限生成射影加群の圏と同値になるというSerre-Swanの定理が成り立つ。本講演では階層体そのものが，階層体構造 (大域切断) 上のアフィンスキームの引き戻しで表せること，階層体に関してもSerre-Swanの定理が成立するということを [1] に基づいて紹介する。

2. 階層体の定義と例

まずSikorski [4] の意味での微分空間 (differential space) を思い出す。

定義 2.1 微分空間 $(S,\mathcal{C})$ とは位相空間 S と S 上の $\mathbb{R}$ 値の連続写像全体がつくる $\mathbb{R}$-代数 $C^0(S)$ の**局所検出可能**かつ C^∞-**閉**部分環 $\mathcal{C}$ との対からなる。

- **局所検出可能性**: $f\in\mathcal{C}$ であるための必要十分条件は，任意の $x\in S$ に対して, x の開近傍 U および $g\in\mathcal{C}$ が存在して $f|_U=g|_U$ をみたす。
- C^∞-**閉性**： 任意の $n\geq 1$ および $\mathcal{C}$ の元からなる n-tuple $(f_1,...,f_n)$ と各微分可能関数 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ に対して，$h(x)=g(f_1(x),....,f_n(x))$ で定義される写像 $h:S\to\mathbb{R}$ は $\mathcal{C}$ に属す。

T_xS を微分空間 $(S,\mathcal{C})$ の点 x 上の**接空間**，すなわち芽の空間 $\mathcal{C}_x$ 上の微分作用素全体がつくるベクトル空間として定義する。

定義 2.2 (Kreck [2]) 微分空間 $(S,\mathcal{C})$ が次の4条件をみたすとき**階層体** (stratifold) という。

1. S は第2可算公理をみたす局所コンパクト，Hausdorff空間である;
2. 各切片 $sk_k(S):=\{x\in S\mid \dim T_xS\leq k\}$ は S の閉集合;
3. 任意の点 $x\in S$ とその近傍 U に対して，U に属する x おける**隆起関数**が存在する，すなわち非負関数 $\rho\in\mathcal{C}$ であり，$\rho(x)\neq 0$ かつ台 $\operatorname{supp}\rho:=\overline{\{p\in S\mid\rho(p)\neq 0\}}$ が U に含まれるものが存在する;
4. 階層 $S^k:=sk_k(S)-sk_{k-1}(S)$ は k-次元可微分多様体であり，$i:S^k\hookrightarrow S$ による制限は各 $x\in S^k$ に対して，芽の同型 $i^*:\mathcal{C}_x\xrightarrow{\cong}C^\infty(S^k)_x$ を誘導する。

階層体の例を幾つか紹介する。部分階層体や少し技巧的ではあるが，積階層体も定義できる。

例 2.3 1) M を可微分多様体. M の開錐を $CM^\circ:=M\times[0,1)/M\times\{0\}\ni[M\times\{0\}]=*$,

$$\mathcal{C}:=\left\{ f:CM^\circ\to\mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f_{|M\times(0,1)}\text{ は可微分関数}, f_{|U}\text{ は} \\ *\text{のある開近傍}U\text{上で定値関数}\end{array}\right\}$$

と定義する。この時 $(CM^\circ,\mathcal{C})$ は非自明切片 $S^{k+1}=M\times(0,1)$ と $S^0=*$ を持つ階層体である。

本研究は科研費 (課題番号:16K13753) の助成を受けたものである。
キーワード：階層体，環付き空間，実スペクトラム，アフィン・スキーム，Serre-Swanの定理，K-理論,
*1 〒390-8621 長野県松本市旭3-1-1 信州大学 学術研究院 理学系 数理・自然情報科学領域
e-mail: `kuri@math.shinshu-u.ac.jp`

2) $(S,\mathcal{C})$ を次元 k 以下の階層体とする。また W を境界を持つ多様体で $\dim W > k$ さらにカラー $c:\partial W\times[0,\epsilon) \xrightarrow{\cong} W$ を持つとする。このとき，次の階層体を得る：$(S' = S\cup_f W,\mathcal{C}')$, ただし，

$$C' = \left\{\, g: S'\to\mathbb{R} \;\middle|\; g_{|S}\in\mathcal{C} \text{ および } w\in\partial W \text{ に対して } gc(w,t) = gf(w) \,\right\}$$

3. 階層体に関する Serre-Swan の定理

以下全ての階層体は有限次元，すなわちある自然数 n が存在して $S = sk_n(S)$ をみたすと仮定する。$(S,\mathcal{C})$ と $(S',\mathcal{C}')$ を階層体とする。連続写像 $f:S\to S'$ が $\varphi\in\mathcal{C}'$ に対して $\varphi\circ f\in\mathcal{C}$ をみたすとき，f を階層体の間の射と定義する。こうして階層体の圏 Stfd が定義される。

さて $\mathbb{R}$-代数 $\mathcal{F}$ に対して，$|\mathcal{F}|$ を $\mathcal{F}$ から $\mathbb{R}$ への $\mathbb{R}$-代数の射からなる集合として定める。写像 $\widetilde{f}:|\mathcal{F}|\to\mathbb{R}$ を $f\in\mathcal{F}$ に対して $\widetilde{f}(x) = x(f)$ と定義し，これらの写像より定まる *Gelfand* 位相を $|\mathcal{F}|$ に入れる。隆起関数の存在から従う階層体上の単位の分割を用いて次を示すことができる。

補題 3.1 $(S,\mathcal{C})$ を階層体とする。$\theta(p)(f) = f(p)$ で定義される写像 $\theta: S\to|\mathcal{C}|$ は同相写像

定理 3.2 階層体の圏 Stfd は階層体構造 ($\mathbb{R}$ 代数部分を) 取り出す忘却関手により充満かつ忠実に $\mathbb{R}$-代数の圏に埋め込まれる。

こうして，階層体の基礎空間は階層体構造から復元できる。また，階層体そのものは，より大きなアフィン・スキームから得られる。以下この事実を解説する。$\mathrm{Spec}_r\,\mathcal{C}$ を実スペクトル，すなわち, 実イデアルからなるプライム・スペクトラム $\mathrm{Spec}\,\mathcal{C}$ の Zariski 位相による部分空間とする。ここで，商環 $\mathcal{C}/\mathsf{m}$ が $\mathbb{R}$ 代数として $\mathbb{R}$ に同型であるとき，$\mathcal{C}$ の極大イデアル m を実イデアルと定義している。さらに，$u(\varphi) = \mathrm{Ker}\ \varphi$ で定義される写像 $u:|\mathcal{C}|\to\mathrm{Spec}_r\,\mathcal{C}$ は同相写像であることがわかる。補題3.1から同相 $S\cong|\mathcal{C}|\cong\mathrm{Spec}_r\,\mathcal{C}$ を得る。

定理 3.3 $(S,\mathcal{O}_S)$ を階層体 $(S,\mathcal{C})$ から得られる環付き空間とし，$i:\mathrm{Spec}_r\mathcal{O}_S(S)\to\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_S(S)$ を包含写像とする。このとき，$(S,\mathcal{O}_S)$ は引き戻し $i^*(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_S(S),\widetilde{\mathcal{O}_S(S)})$ に環付き空間として同型である。ただし，$(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_S(S),\widetilde{\mathcal{O}_S(S)})$ は環 $\mathcal{O}_S(S)$ に同伴するアフィン・スキームである。

階層体の圏におけるカルテシアン積の概念を用いて，階層体 $(S,\mathcal{C})$ 上の有界階数のベクトル束を定義することができる。それらがつくる圏を $\mathsf{VBb}_{(S,\mathcal{C})}$ と表す。

定理 3.4 (階層体に関する Serre-Swan 定理) $(S,\mathcal{C})$ を階層体とする。大域切断関手 $\Gamma(S,-):\mathsf{VBb}_{(S,\mathcal{C})}\to\mathsf{Fgp}(\mathcal{C})$ は圏の同値を与える。ただし，$\mathsf{Fgp}(\mathcal{C})$ は $\mathbb{R}$-代数 $\mathcal{C}$ 上の有限生成射影加群がつくる圏である。

$\mathsf{Lfb}(S)$ を $\mathcal{O}_S$-加群圏 $\mathcal{O}_S$-Mod の有限階数，局所自由 $\mathcal{O}_S$-加群のなす充満部分圏とする。このとき，関手 $\mathcal{L}:\mathsf{VBb}_{(S,\mathcal{C})}\to\mathsf{Lfb}(S)$ を $\mathcal{L}_E: U\rightsquigarrow\Gamma(U,E)$ と定義すると，$\mathcal{L}$ は圏の同値を与える。Morye [3] のアフィン・スキームに関する Serre の定理の一般化を適用して，定理3.4を得ることができる。こうして一般に $S\cong\mathrm{Spec}_r\,\mathcal{C}\subset\mathrm{Spec}\,\mathcal{C}$ であるが次の圏の同値を得る。

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{VBb}_{(S,\mathcal{C})} \arrow[rr, "\Gamma(S,-)", "\text{定理 } 3.4"'] \arrow[dr, "\simeq", "\mathcal{L}"'] & & \mathsf{Fgp}(\mathcal{C}) & \\
& \mathsf{Lfb}(S) \arrow[ur, "\simeq", "\Gamma(S,-)"'] & & \mathsf{Lfb}(\mathrm{Spec}\ \mathcal{C}) \arrow[ul, "\text{Serre}", "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

参考文献

[1] T. Aoki and K. Kuribayashi, On the category of stratifolds, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, 58 (2017), 131–160. `arXiv:1605.04142`.

[2] M. Kreck, Differential Algebraic Topology, From Stratifolds to Exotic Spheres, Graduate Studies in Math., 110, AMS, 2010.

[3] A.S. Morye, Note on the Serre-Swan Theorem, Math. Nachr. **286** (2013), 272–278.

[4] R. Sikorski, Differential modules, Colloq. Math. **24** (1971), 45–79.