Hopf 空間のストリングトポロジー

栗林 勝彦　(信州大学)*

1. 背景

Chas, Sullivan [1] により創始されたストリングトポロジーは, 多様体の自由ループ空間のホモロジーに豊かな代数構造をもたらした。実際, ホモロジー上に定義されるループ (余) 積は, 今日ストリング作用素として位相的量子場の理論さらには, ホモロジー的共形場理論の枠組みで記述される。

M を向きづけられた閉多様体とし, $LM := map(S^1, M)$ を自由ループ空間とする。このとき pair-of-pants コボルディズムに対応する (体係数の) ホモロジー上のストリング作用素がループ積である。

$$m = \textit{the loop product} : H_*(LM) \otimes H_*(LM) \to H_{*-\dim M}(LM)$$

この積によりループホモロジー $\mathbb{H}_*(LM) := H_{*+\dim M}(LM)$ は次数付き可換代数になる。評価写像 $ev_0 : LM \to M$ の切断 $s : M \to LM$, $x \mapsto$ (x での定置写像) は代数準同型写像 $s_* : \mathbb{H}_*(M) \to \mathbb{H}_*(LM)$ を導くため, ループ積は M の交叉積の拡張と言える。Lie 群のループ積に関しては Hepworth により交叉積と Pontryagin 積に分解する事がわかっている。

定理 1.1 ([5]) G を連結 Lie 群とする。$\Theta : \Omega G \times G \to LG$ を $(\gamma, g) \in \Omega G \times G$, $t \in S^1$ に対して $\Theta(\gamma, g)(t) = (\gamma \cdot g)(t) = \gamma(t)g$ と定義する。 このとき, Θ は次数付き代数の同型写像

$$\Theta_* : H_*(\Omega G) \otimes \mathbb{H}_*(G) \cong \mathbb{H}_*(LG),$$

を誘導する。ただし, $H_*(\Omega G)$ は Pontryagin 代数である。

多様体の自由ループ空間に関するストリングトポロジーは, Félix, Thomas [4] により Gorenstein 空間にまで一般化された。以下, $\mathbb{K}$ を体とする。また空間 M は CW-複体のホモトピー型をもち, そのコホモロジー $H^*(M; \mathbb{K})$ は局所有限であると仮定する。

定義 1.2 ([3]) 次の性質を持つ連結空間 M を d 次元 $\mathbb{K}$-*Gorenstein* 空間という。

$$\dim \mathrm{Ext}^*_{C^*(M)}(\mathbb{K}, C^*(M)) = \begin{cases} 0 & \text{if } * \neq d \\ 1 & \text{if } * = d \end{cases}$$

ただし, $C^*(-) := C^*(-; \mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$ 係数特異コチェイン複体関手を意味する。

向きづけられた多様体, より一般に Poincaré 双対空間, 連結 Lie 群 G の分類空間は Gorenstein 空間になる。さらに単連結 G-空間 M が d 次元 Gorenstein 空間であるならば, その Borel 構成 $EG \times_G M$ は $d - \dim G$ 次元 Gorenstein 空間となる。こうして一般に次元 (たとえば分類空間の) は負にもなり得る。

Félix, Thomas [4] による Gorenstein 空間 M 上のストリングトポロジーは, $C^*(M \times M)$ を微分代数と見なすとき, 次数付き $C^*(M \times M)$-微分加群からなる圏の導来圏上で展開される。このため導来ストリングトポロジーと呼ばれる。多様体のストリングトポロジーに現れる位相的

本研究は科研費 (課題番号:25287008) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 55P50, 55P35, 55P45, 18G15
キーワード：ゴレンシュタイン空間, ループ積, Hopf 空間
* 〒390-8621 長野県松本市旭 3-1-1 信州大学 学術研究院 理学系 数理・自然情報科学領域
e-mail: `kuri@math.shinshu-u.ac.jp`
web: `http://marine.shinshu-u.ac.jp/~kuri/home.html`

量子場の理論の Gorenstein 空間版はまだ確立されていないが, Chataur, Menichi によりホモロジー的共形場理論としての分類空間のストリングトポロジーが [2] で展開されている。

ループ (余) 積に限って言えば, それらの導来関手による解釈が [8] で与えられた。結果としてループホモロジーに代数として収束する Eilenberg-Moore 型のスペクトル系列が構成され, さらに [7] では具体的な計算に応用されている。その E_2-項は Hochschild コホモロジー環で記述されるため, 適切な DG 圏の議論からストリングトポロジーへのアプローチ ([9]) も期待できる。

本講演では, 導来ストリングトポロジーの文脈で, Lie 群を含む一般の Hopf 空間のループ積について考察する。

2. ネーター的 Hopf 空間のループ積

次の定理は, ある Hopf 空間も導来ストリングトポロジーの範疇に入ることを保障する。

定理 2.1 M を単連結 Hopf 空間とする。 このとき M が $\mathbb{K}$-Gorenstein 空間であることと M が $\mathbb{K}$-ネーター的, すなわち M の $\mathbb{K}$-係数コホモロジー環が有限生成であることは同値である。

注意 2.2 G を単連結 Lie 群とする。このとき, 基点ループ空間 ΩG は $\mathbb{Z}/p$-Gorenstein 空間ではない。実際 $H^*(\Omega G, \mathbb{Z}/p)$ は無限生成である。

定理 1.1 の写像 Θ と同様に, G が Hopf 空間である場合も写像 $\Theta : \Omega G \times G \to LG$ が定義できる。次は定理 1.1 の一般化である。

定理 2.3 (K, Menichi [6]) G を $\mathbb{K}$-ネーター的単連結 Hopf 空間とする。 このとき誘導写像

$$\Theta_* : H_*(\Omega G) \otimes \mathbb{H}_*(G) \to \mathbb{H}_*(LG)$$

はマグマとしての同型写像である。ただし $H_*(\Omega G)$ は Pontryagin 代数である。さらに $H^*(G)$ が有限次元である場合, Θ_* は次数付き代数としての同型写像となる。

残念ながら, 無限次元の場合は面白くない。

定理 2.4 (K, Menichi [6]) G を $\mathbb{K}$-ネーター的単連結 Hopf 空間とする。$H^*(G; \mathbb{K})$ が無限次元ならば, $\mathbb{H}_*(LM)$ 上のループ積は自明となる。

単連結 Lie 群 G のループ群 LG の有理コホモロジー環は, 一般に有限生成であり多項式環と外積代数のテンソル積で表せる。よって LG は $\mathbb{Q}$-Gorenstein 空間であるが, 上の定理から次の系が従う。

系 2.5 G を単連結 Lie 群とする。このとき, $\mathbb{H}_*(LLG; \mathbb{Q})$ 上のループ積は自明である。

参考文献

[1] M. Chas and D. Sullivan, String topology, preprint (math.GT/0107187).

[2] D. Chataur and L. Menichi, String topology of classifying spaces, J. Reine Angew. Math. **669** (2012), 1-45.

[3] Y. Félix, S. Halperin and J. -C. Thomas, Gorenstein spaces. Adv. in Math. **71**(1988), 92-112.

[4] Y. Félix and J. -C. Thomas, String topology on Gorenstein spaces, Math. Ann. **345**(2009), 417-452.

[5] R. A. Hepworth, String topology for Lie groups, J. Topol. **3** (2010), 424-442.

[6] K. Kuribayashi and L. Menichi, Loop products on Noetherian H-spaces, in preparation.

[7] K. Kuribayashi, L. Menichi and T. Naito, Behavior of the Eilenberg-Moore spectral sequence in derived string topology, Topology and its Applications, **164** (2014), 24-44.

[8] K. Kuribayashi, L. Menichi and T. Naito, Derived string topology and the Eilenberg-Moore spectral sequence, to appear in Israel Journal of Mathematics.

[9] Shamir, Shoham; On the string topology category of compact Lie groups. Adv. Math. **261** (2014), 122-153