擬スキーモイドの Mitchell 埋め込み定理について

栗林 勝彦, 百瀬 康弘

信州大学

日本数学会 2016 年度年会 筑波大学
2016 年 3 月 19 日

研究目的:

- 代数的組合せ論において重要な研究対象であるアソシエーション・スキーム (AS) を圏論的な枠組みで捉え一般化し, 関手的性質や, より多くの道具を用いて AS とその一般化を考察する.

これまでに:

- [K. -Matsuo](2015) 擬**スキーモイド**, アソシエーション・スキーモイドを導入し, スキーモイドの構成方法や基本的性質について考察 (スキーモイドの圏論的性質の理解)
- [K](2015) 小圏の強ホモトピー論を用いて, スキーモイドのホモトピー論を展開

今回: 小圏から得られる圏代数の部分代数として, スキーモイドの **Bose-Mesner 代数**が得られる. この代数または関連するアーベル圏を考えて, ホモロジー代数, 表現論を展開する枠組みを作る.

定義 1.1 (K.- Matsuo (2015))

$\mathcal{C}$ を小圏とする. $S := \{\sigma_l\}_{l \in I}$ を $\mathcal{C}$ の射全体がつくる集合 $mor(\mathcal{C})$ の分割 (色づけ) とする: $mor(\mathcal{C}) = \coprod_{\sigma \in S} \sigma$

次の条件 (*) をみたすとき, 圏 $\mathcal{C}$ と分割の対 $(\mathcal{C}, S)$ を**擬スキーモイド** (以下, 単に**スキーモイド**) と呼ぶ.

(*) 任意の $\sigma, \tau, \mu \in S$ と μ の任意の射 f, g に対して, 集合としての同型

$$(\pi^{\mu}_{\sigma\tau})^{-1}(f) \cong (\pi^{\mu}_{\sigma\tau})^{-1}(g),$$

が成り立つ. ただし, $\pi^{\mu}_{\sigma\tau} : \pi^{-1}_{\sigma\tau}(\mu) \to \mu$ は結合写像

$$\pi_{\sigma\tau} : \sigma \times_{ob(\mathcal{C})} \tau := \{(u, v) \in \sigma \times \tau \mid s(u) = t(v)\} \to mor(\mathcal{C})$$

を制限して定義される写像を表している. 以下 $(\pi^{\mu}_{\sigma\tau})^{-1}(f)$ の濃度を $p^{\mu}_{\sigma\tau}$ と表し, **構造定数**という.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, "f \in \mu"] \arrow[dr, "k \in \tau"'] & & z \\ & y \arrow[ur, "h \in \sigma"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x' \arrow[rr, "g \in \mu"] \arrow[dr, "k' \in \tau"'] & & z' \\ & y' \arrow[ur, "h' \in \sigma"'] & \end{tikzcd}$$

定義 2.1 (スキーモイドの関手圏)

$\mathcal{T}$ を体 $\mathbb{K}$ 上ベクトル空間の圏とする．射はすべて異なる色を持つ”スキーモイド”と考える．$(\mathcal{D}, S)$ をスキーモイドとする．このとき，スキーモイドの射 (色づけを保つ関手) からなる関手圏 (アーベル圏となる)

$$T^{(\mathcal{D},S)}$$

を考えることができる．$T^{(\mathcal{D},S)}$ の射は $\eta : u \Rightarrow v$ は自然変換で $^{\exists}\sigma \in S$ s.t. $id_x, id_y \in \sigma$ ならば $\eta_x = \eta_y$ をみたすものとする．

なぜ関手圏を考える? スキーモイドの射 $u : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{E}, S')$ は Bose-Mesner 代数の間に自然に代数の射を**誘導しない**．したがって，それぞれの Bose-Mesner 代数の加群圏上に関手が得られない．しかし u は自然に関手

$$u^* : T^{(\mathcal{E},S')} \to T^{(\mathcal{C},S)}$$

を誘導する．

スキーモイドに関して Mitchell の埋め込み定理は成立するか?

定義 2.2 (従順スキーモイド)

スイーモイド $(\mathcal{C}, S)$ は従順 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ T(i): $J_0 := \{id_x\}_{x \in ob\mathcal{C}}$ とするとき,

$$\{id_x\}_{x \in ob\mathcal{C}} = \bigcup_{\alpha \in S, \alpha \cap J_0 \neq \varnothing} \alpha.$$

T(ii): 図式 $[\mathcal{C}]$ を次で定める. $ob[\mathcal{C}] := \{id_x\}_{x \in ob\mathcal{C}} / \sim_S = \{[x]\}$,

$$mor_{[\mathcal{C}]}([x], [y]) := \{\sigma \in S \mid s(\sigma) \subset [x],\ t(\sigma) \subset [y]\}.$$

このとき射 $[x] \xrightarrow{\sigma} [y] \xrightarrow{\tau} [z]$ に対して, 構造定数 $p^{\mu}_{\tau\sigma} \geq 1$ をみたす S の元 $\mu = \mu(\tau, \sigma)$ が一意に定まる.

注意) **結果として, $[\mathcal{C}]$ は圏になる.**

定理 2.3 (Mitchell 埋め込み定理)

基礎圏 $\mathcal{D}$ の対象がつくる集合が有限である場合, **従順スキーモイド** $(\mathcal{D}, S')$ に関しては *Mitchell* 埋め込み定理が成立する. すなわち圏同値 $\mathcal{T}^{(\mathcal{D}, S')} \simeq \mathbb{K}[\mathcal{D}]$-*Mod* が成立する. 全ての構造定数が 1 以下ならば, 圏代数 $\mathbb{K}[\mathcal{D}]$ は $(\mathcal{D}, S')$ の *Bose-Mesner* 代数と一致する.

定理 2.4 (関手圏における随伴関手)

スキーモイド $(\mathcal{C}, S)$ から従順スキーモイド $(\mathcal{D}, S')$ への射 $u : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, S')$ から誘導される関手 $u^* : \mathcal{T}^{(\mathcal{D}, S')} \to \mathcal{T}^{(\mathcal{C}, S)}$ に対して，左随伴 $\mathit{Lan}_u : \mathcal{T}^{(\mathcal{C}, S)} \to \mathcal{T}^{(\mathcal{D}, S')}$ および右随伴 $\mathit{Ran}_u : \mathcal{T}^{(\mathcal{C}, S)} \to \mathcal{T}^{(\mathcal{D}, S')}$ が存在する．したがって，チェイン複体の圏の間の右，左随伴を得る．

$$\begin{tikzcd} Ch(\mathcal{T}^{(\mathcal{D}, S')}) \arrow[r, "u^*"] & Ch(\mathcal{T}^{(\mathcal{C}, S)}) \arrow[l, bend right, "\mathit{Lan}_u"'] \arrow[l, bend left, "\mathit{Ran}_u"] \end{tikzcd}$$

定理 2.5 (モデル圏構造)

上の記号のもと，集合 $ob[\mathcal{D}]$ の対象は有限であると仮定する．このとき弱同値が Ran_u により $Ch(\mathcal{T}^{(\mathcal{D}, S')}) \simeq Ch(\mathbb{K}[\mathcal{D}]\text{-Mod})$ の擬同型に写される射として定義されるコファイブラント生成モデル圏構造が $Ch(\mathcal{T}^{(\mathcal{C}, S)})$ に入る．さらに (u^*, Ran_u) はこのモデル圏構造に関して，*Quillen* 対となる．

定義 2.6 (スキーモイドの森田同値)

スキーモイドの関手圏 $\mathcal{T}^{(\mathcal{C},S_{\mathcal{C}})}$ と $\mathcal{T}^{(\mathcal{C}',S_{\mathcal{C}'})}$ が圏同値であるとき，スキーモイド $(\mathcal{C},S_{\mathcal{C}})$ と $(\mathcal{C}',S_{\mathcal{C}'})$ は**森田同値**であるという．

群から得られる AS と一般にそうではない AS がスキーモイドの圏の中で関連づけられる．

命題 2.7

長さ 2 のバイナリーコードがつくるハミング・スキーム $H(n,2)$ から図式 (1.1) における関手を経て得られるスキーモイド $\jmath(H(n,2))$ と群 $\mathbb{Z}/2$ から得られるスキーモイド $\widetilde{S}(\mathbb{Z}/2)$ は森田同値である．

ハミング・スキーム $H(2,2)=(X,S)$
$X=\{00,01,10,11\}$, $S=X\times X$ の分割 $=\{T_0,T_1,T_2\}$

$$\jmath(H(2,2)):\quad \begin{tikzcd} 00 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow, dotted] & 10 \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow, dotted] \\ 01 \arrow[r, leftrightarrow] & 11 \end{tikzcd}$$

定理 2.8 (Hochschild コホモロジー型不変量)

スキーモイドの射 $u : (\mathcal{C}_1, S_1) \to (\mathcal{C}_2, S_2)$, $w : (\mathcal{C}_1, S_1) \to (\mathcal{D}, S')$, $w' : (\mathcal{C}_2, S_2) \to (\mathcal{D}, S')$ が $w'u = w$ をみたし，さらに $(\mathcal{D}, S')$ は従順とする．もし u が (C_1, S_2) と (C_2, S_2) の森田同値を誘導するならば，$\mathcal{T}^{(\mathcal{D}^{op} \times \mathcal{D}, S' \times S')}$ の任意の対象 h に対して，次の同型が成立する．

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{T}(\mathcal{D}^{op} \times \mathcal{C}_1, S' \times S_1)}((1 \times w)^* h, (1 \times w)^* h) \cong \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{T}(\mathcal{D}^{op} \times \mathcal{C}_2, S' \times S_2)}((1 \times w')^* h, (1 \times w')^* h).$$

今後の課題 2.9

アーベル圏上でのホモトピー論，森田同値の一般的な不変量や必要十分条件を考察するためには，従順とは限らないスキーモイド $(\mathcal{C}, S)$ に対して，チェイン複体の圏 $Ch(\mathcal{T}^{(\mathcal{C}, S)})$ に "標準的" なモデル圏構造を導入する必要があろう．