

Eilenberg-Moore スペクトル系列 (1) 二人の Eilenberg-Moore とその仲間 Eilenberg-Moore スペクトル系列 (2) 計算の助っ人, 作用素

栗林 勝彦

2013年3月9日 信州 春の学校

はじめに

60年代後半に現れた Eilenberg-Moore スペクトル系列 (EMSS) は 70年代に P. F. Baum や D. Kraines, L. Smith らにより精練されていき, さらに一般コホモロジーへの応用へと広がっていくことになる。Lie 群の等質空間, 基点付きループ空間, 自由ループ空間のコホモロジーの計算が進んだのはこの EMSS のお陰であるといえる。

この章の著者がはじめて EMSS に出会ったのは 80年代も後半のことで修士課程学生の頃であった。Leray-Serre スペクトル系列 (LSSS) の次に学んだのがこの EMSS で, 随分 LSSS と雰囲気異なり, その構成方法や, 計算, 至る所でホモロジー代数的手法を用いる様は当時の私には斬新なものであった¹。その魅力に取りつかれて 25年経ったことになる。

学生時代, 井上さん (井上浩一氏, 現在 東京都市大学) に一般コホモロジーのチェイン複体版は何でしょうかと尋ねたことがあった。即座に「栗林君それは, Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列だよ。」なるほど確かに多くのチェイン複体とフィルトレーションで一般コホモロジーを表示している。Adams スペクトル系列もしかり, ホモトピー集合はスペクトル系列というチェイン複体による“近似”を持っていると解釈できる。こうした観点が根底にあったと思うが, 私はいつ頃からかスペクトル系列も空間の代数的模型²の一種と考えている。

Quillen, Sullivan により創始された有理ホモトピー論 [F-H-T] や Mandell 理論 [Man] からすると, 特異コチェイン複体 (微分代数) は局所化, 完備化のもとで空間を分類するのに十分な幾何学的情報を含んでいる。したがって一般に, スペクトル系列の E_2 -項, E_3 -項, ... にも収束先のホモトピー, (コ)ホモロジーでは消える情報がたくさん詰まっているのではないだろうか。適当な項に非自明な微分が出てきた方が嬉しいと, そんなことを考えながらスペクトル系列の計算を進めるのも面白いと思う³。

同僚の玉木さんから「信州春の学校」で EMSS について語る良い機会を与えて頂いた。そのときの講義ノートをもとに, 実際の講義では時間がなくて割愛した部分も含めここに講義録としてまとめることにする⁴。「信州春の学校」という企画を実現された玉木氏に感謝いたします。

1. 二人の EILENBERG-MOORE とその仲間

この章では, はじめに 2つの Eilenberg-Moore スペクトル系列を紹介し, E_2 -項の計算に役立つ Koszul 分解を説明する。次にコホモロジー環が単生成である単連結空間 M を考え, その自由ループ空間 LM のコホモロジー環を EMSS を用いて具体的に計算する。また EMSS の E_2 -項の計算の応用として, 自由ループファイブレーションの TNCZ 問題を考察する。

記号と仮定 \mathbb{K} は任意標数の体を表し, $H^*(M)$ と $C^*(M)$ はそれぞれ空間 M の \mathbb{K} -係数特異コホモロジーと特異コチェイン複体 (またはカップ積を持つ代数) とする。以下空間 M は連結なものを考えることにする。また特に断らない限り, 体 \mathbb{K} が与えられたとき任意の i に対して $\dim H^i(M) < \infty$ を仮定する。

以下で考えるスペクトル系列 $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ はコホモロジー的である, すなわち

$$d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$$

をみたまものとする。 $p \leq 0$ かつ $q \geq 0$ 以外 ($p \geq 0$ かつ $q \geq 0$ 以外) で $E_2^{p,q} = 0$ となる時, そのスペクトル系列を第 2 象限型 (第 1 象限型) という。例えば LSSS は第 1 象限型である。

¹Eilenberg, Moore を冠にもつスペクトル系列であるし, ホモロジー代数がトポロジーの発展から出現したことを考えればそれは自然ではあるが。

²明確な定義はないが, この稿では (コ)ホモロジーよりも空間の特性を記述する情報を持っている, 微分代数, オペラド上の代数などの代数的対象のことと考えて頂きたい。

³残念ながら非自明な微分を持つ EMSS はこの稿では出てこない。主張 1.11 で示すように, EMSS の E_2 -項の計算から LSSS の非自明な微分を見つけることもできる。また非自明な微分を持つ EMSS とその計算, 応用に興味を持つ読者は [Smith2], [K3] を参照して頂きたい。

⁴特に本稿の第 3 章は講義では全く触れなかった 2 重次数付き複体の構成とスペクトル系列の利用による微分代数のホモロジーの計算手法について, 例を用いて解説した。

いくつかの空間から (余) 単体的的手法を用いて収束先の幾何学的模型を作り, その模型から入るフィルトレーションやモデルがつくるファイブレーションに (一般) ホモロジー論を適用して完全対を構成することができる。第 1 章ではその完全対からどのようにスペクトル系列が生まれるかをみてきた。

一方 2 重複体 $K := \{K^{*,*}, d, \delta\}$ (bideg $d = (0, 1)$, bideg $\delta = (1, 0)$) を考える。このとき K のフィルトレーションを $F^p K = \bigotimes_{i \geq p} K^{i,*}$ と定めることで複体の完全系列

$$0 \rightarrow F^{p+1}K \rightarrow F^p K \rightarrow F^p K / F^{p+1}K \rightarrow 0$$

からホモロジー長完全列を作り, そこから完全対をつくることで第 1 章のようにスペクトル系列を構成することができる。一方 K のフィルトレーションから直接 E_r -項 ($r = 1, 2, \dots, \infty$) を作りスペクトル系列 $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ を構成することも可能である⁵。特に

$$(1) \quad (E_1^{p,q}, d_1) = (H^q(F^p K / F^{p+1}K, \bar{d}), \bar{\delta})$$

であることに注意する。ここで $\bar{d}, \bar{\delta}$ は d, δ から自然に誘導される微分である。これらの構成方法を空間の代数的模型に適用することで Eilenberg-Moore スペクトル系列 (EMSS) を構成することもできる⁶。

定理 1.1. [Smith1][G-M] (バー型の EMSS) $p : E \rightarrow B$ を F をファイバーとする単連結空間 B 上のファイブレーションとする。写像 $f : X \rightarrow B$ による p のプルバック図式

$$\begin{array}{ccc} F & \xlongequal{\quad} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{f,p} & \xrightarrow{g} & E \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

を考える。このとき $H^*(E_{f,p})$ に代数として収束する第 2 象限型スペクトル系列 $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ が存在し, 2 重次数付き代数として

$$E_2^{*,*} \cong \mathrm{Tor}_{H^*(B)}^{*,*}(H^*(X), H^*(E))$$

が成り立つ。ここで $H^*(X)$ と $H^*(E)$ はそれぞれ誘導写像 $f^* : H^*(B) \rightarrow H^*(X)$ と $p^* : H^*(B) \rightarrow H^*(E)$ により, 右 $H^*(B)$ -加群, 左 $H^*(B)$ -加群と見なしている。

次がもう一人の Eilenberg-Moore である。

定理 1.2. [E-M][G-M] (コバー型 EMSS) $p : E \rightarrow B$ をファイブレーション, G を E に右から作用する位相群とし, 任意の $g \in G, x \in E$ に対して $p(xg) = p(x)$ をみたすとする。さらに任意の $b \in B, x \in p^{-1}(b)$ に対して写像 $G \rightarrow p^{-1}(b); g \mapsto xg$ は弱ホモトピー同値であると仮定する。また空間 Y に位相群 G が左から作用しているとする。このとき $H^*(E \times_G Y)$ に代数として収束する第 1 象限型スペクトル系列 $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ が存在し, 2 重次数つき代数として

$$E_2^{*,*} \cong \mathrm{Cotor}_{H^*(G)}^{*,*}(H^*(E), H^*(Y))$$

が成り立つ。ここで $H^*(E)$ と $H^*(Y)$ は G の作用から誘導される写像によりそれぞれ右 $H^*(G)$ -余加群, 左 $H^*(G)$ -余加群でと見なしている。

ここで定理 1.1 で述べられている EMSS の代数構造を明らかにするために, プルバックの代数的模型を明らかしよう⁷。

⁵このスペクトル系列は完全対から得られるものと同型である。

⁶次の定理 1.1 と定理 1.2 のホモロジー版の EMSS は基礎体を一般の単項イデアル整域環に置き換えてもよい。その構成方法 [G-M] は以下で紹介されるバー分解から得られる 2 重複体を用いるのではなく, より一般的な半自由分解 (semi-free resolution) を用いる。

⁷[G-M] では定理 1.2 のスペクトル系列の双対版が示されている。その双対版のスペクトル系列は余代数として特異ホモロジー $H_*(E \times_G Y)$ に収束しているから, その双対である定理 1.2 のスペクトル系列は代数構造を持つことになる。

定理 1.3. [Smith1][G-M] 写像 g, q および $C^*(E_{f,p})$ 上のカップ積 \cup は擬同型⁸

$$EM := q^* \circ \varepsilon \cup g^* : C^*(X) \otimes_{C^*(B)}^{\mathbb{L}} C^*(E) := P^\bullet \otimes_{C^*(B)} C^*(E) \xrightarrow{\cong} C^*(E_{f,p})$$

を誘導する。ここで $P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} C^*(X) \rightarrow 0$ は $C^*(X)$ の右 $C^*(B)$ -加群としての射影的分解である。

特異コチェイン複体上のカップ積を思い出すと同時に、定理 1.1 のスペクトル系列の代数構造に言及する。まず次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} C^*(X) \otimes_{C^*(B)}^{\mathbb{L}} C^*(E) \otimes C^*(X) \otimes_{C^*(B)}^{\mathbb{L}} C^*(E) & \xrightarrow[\cong]{EM \otimes EM} & C^*(E_{f,p}) \otimes C^*(E_{f,p}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \gamma \\ C^*(X) \otimes C^*(X) \otimes_{C^*(B) \otimes C^*(B)}^{\mathbb{L}} C^*(E) \otimes C^*(E) & & \\ \gamma \otimes \gamma \downarrow & & \\ (C_*(X) \otimes C_*(X))^\vee \otimes_{(C_*(B) \otimes C_*(B))^\vee}^{\mathbb{L}} (C_*(E) \otimes C_*(E))^\vee & \xrightarrow[\cong]{EM} & (C_*(E_{f,p}) \otimes C_*(E_{f,p}))^\vee \\ EZ^\vee \otimes_{EZ^\vee} EZ^\vee \uparrow \cong & & EZ^\vee \uparrow \cong AW^\vee \\ C^*(X \times X) \otimes_{C^*(B \times B)}^{\mathbb{L}} C^*(E \times E) & \xrightarrow[EM]{\cong} & C^*(E_{f,p} \times E_{f,p}) \\ \Delta^* \otimes \Delta^* \Delta^* \downarrow & & \downarrow \Delta^* \\ C^*(X) \otimes_{C^*(B)}^{\mathbb{L}} C^*(E) & \xrightarrow[EM]{\cong} & C^*(E_{f,p}) \end{array}$$

ここで Δ は対角写像, γ は自然な入射である。また EZ と AW はそれぞれ Eilenberg-Zilber 写像と Alexander-Whitney 写像を表している。 EZ^\vee は代数の射であることに注意する。定義により、左縦の写像が定理 1.1 のスペクトル系列 $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ の代数構造を定め、さらに特異コチェイン代数はカップ積に関してホモトピー可換であることから上の図式の可換性がいえる。これより $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ は代数として $H^*(E_{f,p})$ に収束することが示せる。特に重要な点は、式 (1) により E_1 -項において左縦の写像が $H(\Delta^* \otimes \Delta^* \Delta^*) \circ H(EZ^\vee \otimes_{EZ^\vee} EZ^\vee)^{-1}$ という項を持つことであり、これより E_2 -項に定義される積は可換代数上の圏で定義されるトーション関手の通常の積と一致することがわかる。

E_2 -項はどのように計算されるであろうか?

一般に $\eta : A \rightarrow \mathbb{K}$ を添加写像に持つ微分代数 A と右 A -微分加群 N に対して、 N の右 A 加群としてのバー分解

$$(B^\bullet(N, A), d + \partial) \xrightarrow{\varepsilon} N \rightarrow 0$$

は N の射影的分解を与える。各項と微分は次のようにして与えられる。

$$\begin{aligned} B^{-p}(N, A) &:= N \otimes \bar{A}^{\otimes p} \otimes A, \text{ ただし } \bar{A} := \text{Kern } \eta \\ \partial_p(b[a_1 | \cdots | a_p]a) &= d_n b[a_1 | \cdots | a_p]a \\ &\quad + \sum_{i=1}^p \bar{b}[\bar{a}_1 | \cdots | \bar{a}_{i-1} | d_A(a_i) | a_{i+1} | \cdots | a_p]a \\ &\quad + \bar{b}[\bar{a}_1 | \cdots | \bar{a}_p] d_{AA}, \\ \partial_p(b[a_1 | \cdots | a_p]a) &= (-1)^{\deg b} b a_1 [a_2 | \cdots | a_p] a \\ &= + \sum (-1)^{\deg b} b [\bar{a}_1 | \cdots | \bar{a}_{i-1} | \bar{a}_i a_{i+1} | \cdots | a_p] a \\ &\quad + (-1)^{\deg b} b [\bar{a}_1 | \cdots | \bar{a}_{p-1}] a_p a, \end{aligned}$$

ここで $\bar{c} = (-1)^{\deg c + 1} c$ である。したがって左 A 微分加群 L に対して、定義より

$$\text{Tor}_A(N, L) = H(B^\bullet(N, A) \otimes_A L)$$

であるから、原理的にはこのバー分解を特異コホモロジーに適用して定理 1.1 の E_2 -項を計算できることになるが、余りにも情報が多すぎる。そこで特別ではあるが重要な場合に E_2 -項を計算する経済的な射影分解, Koszul 分解を紹介する。

⁸ホモロジー上に同型写像を誘導する準同型写像

定義 1.4. 次の形の次数付き可換代数 A を GCI (graded complete intersection) 代数という。

$$A = \wedge(y_1, \dots, y_l) \otimes \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/(\rho_1, \dots, \rho_m),$$

ただし ρ_1, \dots, ρ_m は正規列である。すなわち任意の j に対して ρ_j は多項式環 $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ の分解元でありかつ $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/(\rho_1, \dots, \rho_{j-1})$ の非零因子である。

以下, 次数付きの元 z により生成される分割巾代数 (divided power algebra) を $\Gamma[z]$ で表す。定義より $\Gamma[z]$ はベクトル空間としては

$$\Gamma[z] = \mathbb{K}\langle \gamma_r(z) \mid r \geq 0 \rangle$$

であり積は

$$\gamma_i(z)\gamma_j(z) = \binom{i+j}{i} \gamma_{i+j}(z)$$

で与えられる \mathbb{K} -代数である。ただし $\deg \gamma_r(z) = r \deg z$ である。 $\gamma_0(z)$ がこの代数の単位元 1 であり, $\gamma_1(z) = z$ とする。また $\Gamma[z_1, \dots, z_k] := \Gamma[z_1] \otimes \dots \otimes \Gamma[z_k]$ とおく。

注意 1.5. 体 \mathbb{K} の標数を p とする。 $p > 0$ のとき \mathbb{K} -代数として次の同型が成り立つ。

$$\Gamma[z] \cong \bigotimes_{r \geq 1} \mathbb{K}[\gamma_r(z)]/(\gamma_r(z)^p)$$

よって $\Gamma[z]$ は無限生成代数となる。 $p = 0$ の場合は $\Gamma[z]$ は z 上の多項式環 $\mathbb{K}[z]$ に同型である。

命題 1.6. [Smith4][K1] A を定義 1.4 の GCI-代数とする。このとき \mathbb{K} の右 A -加群としての射影的分解 $\mathcal{K} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K} \rightarrow 0$ で次をみたすものが存在する。

$\mathcal{K} = \Gamma[s^{-1}y_1, \dots, s^{-1}y_l] \otimes \wedge(s^{-1}x_1, \dots, s^{-1}x_n) \otimes \Gamma[\tau\rho_1, \dots, \tau\rho_m] \otimes A$ であり, 微分は

$$\begin{aligned} d(\gamma_r(s^{-1}y_i)) &= \gamma_{r-1}(s^{-1}y_i) \otimes y_i, \\ d(s^{-1}x_j) &= x_j, \\ d(\gamma_r(\tau\rho_i)) &= \gamma_{r-1}(\tau\rho_i) \otimes \xi_i \end{aligned}$$

で与えられる。ただし $\xi_i \in \wedge(s^{-1}x_1, \dots, s^{-1}x_n) \otimes \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ は $d(\xi_i) = \rho_i$ をみたす元である。また 2 重次数は $\text{bideg } s^{-1}y_i = (-1, \deg y_i)$, $\text{bideg } s^{-1}x_j = (-1, \deg x_j)$, $\text{bideg } \tau\rho_i = (-2, \deg \rho_i)$ で与えられる。この結果, 2 重次数付き代数として

$$\text{Tor}_A^{*,*}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \cong H(\mathcal{K} \otimes_A \mathbb{K}) = \Gamma[s^{-1}y_1, \dots, s^{-1}y_l] \otimes \wedge(s^{-1}x_1, \dots, s^{-1}x_n) \otimes \Gamma[\tau\rho_1, \dots, \tau\rho_m]$$

が成り立つ。

この命題に関して少し解説を加える。 \mathbb{K} には A が自明に作用している。したがって上の命題の微分代数 \mathcal{K} の微分の形から $\mathcal{K} \otimes_A \mathbb{K}$ 上の誘導される微分は零であることがわかり, (ii) のようにトーション積 $\text{Tor}_A^{*,*}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ が計算されるのである。

命題 1.7. [Smith4][K1] A を定義 1.4 の GCI-代数とする。このとき A の右 $A \otimes A$ -加群としての射影的分解 $\mathcal{F} \xrightarrow{\mu} A \rightarrow 0$ で次をみたすものが存在する。

(i) $\mathcal{F} = \Gamma[\nu_1, \dots, \nu_l] \otimes \wedge(u_1, \dots, u_n) \otimes \Gamma[w_1, \dots, w_m] \otimes A \otimes A$ であり, 微分は

$$\begin{aligned} d(A \otimes A) &= 0 \\ d(\gamma_r(\nu_i)) &= \gamma_{r-1}(\nu_i) \otimes (y_i \otimes 1 - 1 \otimes y_i), \\ d(u_j) &= x_j \otimes 1 - 1 \otimes x_j, \\ d(\gamma_r(w_i)) &= \gamma_{r-1}(w_i) \otimes \left(\sum_{j=1}^n u_j \zeta_{ij} \right) \end{aligned}$$

で与えられる。ただし μ は A の積を表し, ζ_{ij} は $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \otimes \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ の元であり,

$$\rho_i \otimes 1 - 1 \otimes \rho_i = \sum_{j=1}^n (x_j \otimes 1 - 1 \otimes x_j) \zeta_{ij}, \quad \mu(\zeta_{ij}) = \frac{\partial \rho_i}{\partial x_j}$$

をみます。2重次数は $\text{bideg } \nu_i = (-1, \deg y_i)$, $\text{bideg } u_j = (-1, \deg x_j)$, $\text{bideg } w = (-2, \deg \rho_i)$ で与えられる。したがって、2重次数付き代数として

$$\text{Tor}_{A \otimes A}^{*,*}(A, A) \cong H(\mathcal{F} \otimes_{A \otimes A} A) = H(\Gamma[\nu_1, \dots, \nu_l] \otimes \wedge(u_1, \dots, u_n) \otimes \Gamma[w_1, \dots, w_m] \otimes A, D)$$

が成り立つ。ただし D の非自明な微分は

$$D(w_i) = \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial \rho_i}{\partial x_j}$$

により与えられる。

注意 1.8. $\text{Tor}_{A \otimes A}(A, A)$ は A が次数付き可換代数であるため、定義より A の Hochschild ホモロジー $HH_*(A, A)$ に他ならない。また $\mu(x_j \otimes 1 - 1 \otimes x_j) = 0 = \mu(y_i \otimes 1 - 1 \otimes y_i)$ であるから、命題 1.7 における Koszul 複体 \mathcal{F} に対して $\mathcal{F} \otimes_{A \otimes A} A$ 上では $D(u_j) = 0 = D(\gamma_r(\nu_i))$ となる。

命題 1.7 に表れる元 ζ_{ij} の存在は [Smith4, Lemma 3.4] 参照。例えば $\rho_i = x_j^k$ のとき、

$$\rho_i \otimes 1 - 1 \otimes \rho_i = (x_j \otimes 1 - 1 \otimes x_j)(x_j^{k-1} \otimes 1 + x_j^{k-2} \otimes x_j + \dots + 1 \otimes x_j^{k-1})$$

より $\zeta_{ij} = x_j^{k-1} \otimes 1 + x_j^{k-2} \otimes x_j + \dots + 1 \otimes x_j^{k-1}$ であり、確かに $\mu(\zeta_{ij}) = kx_j^{k-1} = \frac{\partial \rho_i}{\partial x_j}$ である。

命題 1.6 と命題 1.7 を応用して EMSS の計算例をみていく。まず上述の Koszul 分解及び EMSS を用いて私達が考察する空間をここで明らかにしておこう。

空間 X から Y への写像全体の集合にコンパクト開位相を入れた空間を $\mathcal{F}(X, Y)$, 基点を保つ写像からなる部分空間を $\mathcal{F}_*(X, Y)$ と表す。特に $LM := \mathcal{F}(S^1, M)$, $\Omega M := \mathcal{F}_*(S^1, M)$ とおいて、それぞれを M の自由ループ空間, 基点付きループ空間という。さらに $M^I = \mathcal{F}(I, M)$, $PM = \{\gamma \in \mathcal{F}(I, M) \mid \gamma(1) = *\}$ とおく。このとき次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc} \Omega M & \longrightarrow & PM & \xleftarrow{\simeq} & * \\ & \searrow i & \downarrow & \searrow & \downarrow \\ & & LM & \longrightarrow & M^I & \xleftarrow{c} & M \\ & & \downarrow ev_0 & & \downarrow ev_0 & & \downarrow ev_0 \times ex_1 \\ * & \longrightarrow & M & \xrightarrow{1 \times *}& M & & M \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Delta \\ & & M & \longrightarrow & M \times M & & \Delta \end{array}$$

ここで、 $\Delta(m) = (m, m)$, $(1 \times *) (m) = (m, *)$ そして ev_t は $ev_t(\gamma) = \gamma(t)$ で定義される t での評価写像である。 $ev_0, ev_0 \times ev_1$ はファイブレーションであり前、後面の四角形からなる可換図式はプルバック図式となっていることに注意する。

後面のプルバック図式に定理 1.1 を適用して得られる EMSS を $\{\widehat{E}_r^{*,*}, \widehat{d}_r\}$ とする。したがって

$$\widehat{E}_2^{*,*} \cong \text{Tor}_{H^*(M)}^{*,*}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \xrightarrow{\text{alg}} H^*(\Omega M)$$

が成り立つ。前面のプルバック図式からは EMSS $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ で

$$E_2^{*,*} \cong \text{Tor}_{H^*(M) \otimes H^*(M)}^{*,*}(H^*(M), H^*(M)) \xrightarrow{\text{alg}} H^*(LM)$$

をみますものが得られる。また写像 $i \times *$ と EMSS の自然性から得られるスペクトル系列の間の射を

$$\{j_r\} : \{E_r^{*,*}, d_r\} \rightarrow \{\widehat{E}_r^{*,*}, \widehat{d}_r\}$$

とおく。

仮定 1.9. M を単連結空間で、 $H^*(M) \cong \mathbb{K}[x]/(x^{n+1})$, $\deg x = m$ をみますものとする。また体 \mathbb{K} の標数は 0 であるかまたは $n+1$ を割り切るとする。

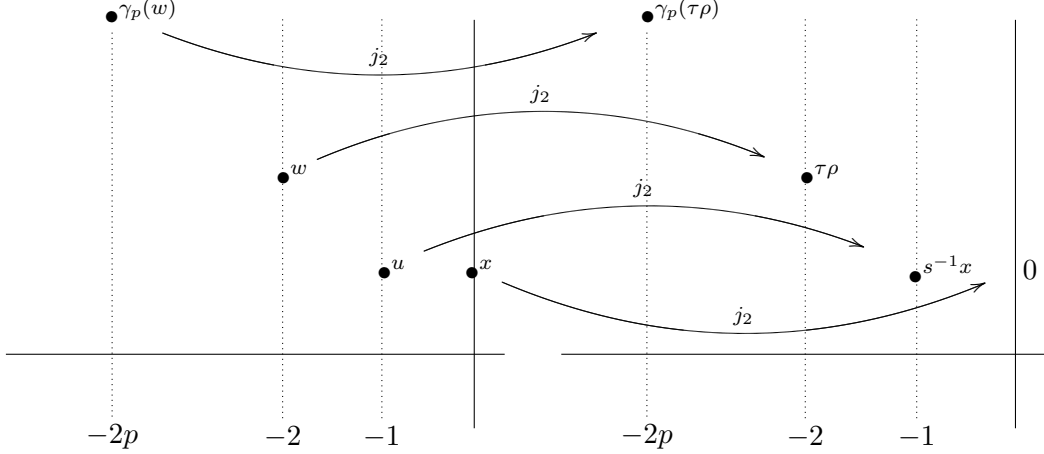
例えば $M = \mathbb{C}P^n$ で $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ がこの場合に相当する。このとき $H^*(\Omega M)$ と $H^*(LM)$ を次数付き代数として決定しよう。体の標数の仮定と命題 1.7 から

$$(2) \quad E_2^{*,*} \cong H(\wedge(u) \otimes \Gamma[w] \otimes H^*(M), D(w) = \frac{\partial(x^{n+1})}{\partial x} = 0) \cong \wedge(u) \otimes \Gamma[w] \otimes H^*(M),$$

ただし, $\text{bideg } u = (-1, m)$, $\text{bideg } w = (-2, (n+1)m)$, $\text{bideg } x = (0, \deg x)$ ($x \in H^*(M)$) となる。 $x^{n+1} = \rho$ であることに注意する。また命題 1.6 から (\mathbb{K} の標数に関係なく)

$$\widehat{E}_2^{*,*} \cong \wedge(s^{-1}x) \otimes \Gamma[\tau(x^{n+1})]$$

が成り立つ。ただし, $\text{bideg } s^{-1}x = (-1, m)$, $\text{bideg } \tau(x^{n+1}) = (-2, (n+1)m)$ である。



仮に EMSS $\{E_r, d_r\}$ においてある E_r -項で初めて非自明な微分が現れたとする。 u, x はいずれも permanent cycle より, その微分で写される元は $\gamma_{p^s}(w)$ という形の元であると仮定して良い。したがって d_r による像は一般的に

$$d_r(\gamma_{p^s}(w)) = \lambda u \gamma_{p^{s-1}}(w)^{k_1} \cdots \gamma_p(w)^{k_{s-1}} \gamma_1(w)^{k_s} x^t + \cdots$$

と表せる。ただし λ は \mathbb{K} の元で, k_i, t は 0 以上の整数である。左辺の全次数は奇数より右辺の各項は必ず u という因子を含まなければならないことに注意する。

また両辺の全次数を比べると

$$2p^s(m(n+1) - 1) + 1 = (m - 1) + 2(m(n+1) - 1)p^{s-1}k_i + \cdots + 2(m(n+1) - 1)k_s + mt$$

という等式を得ることができ, フィルトレーションの次数 (横軸次数) を比較すると

$$2p^s - 1 > 1 + 2k_1p^{s-1} + \cdots + 2k_s$$

という不等式を得る。 $2p^s > 2 + 2k_1p^{s-1} + \cdots + 2k_s$ に $(m(n+1) - 1)$ を掛けて考察すると, 上の等式に矛盾した不等式が得られる。このような単純な次数の比較で EMSS $\{E_r, d_r\}$ が E_2 -項で潰れることがわかる。バー分解と Koszul 分解を比較することで, $j_2(u) = s^{-1}x$, $j_2(\gamma_r(w)) = \gamma_r(\tau(x^{n+1}))$, $j_2(x) = 0$ (詳しくは [K1, Lemma 1.3] 参照) となることが示せる。こうして EMSS の自然性により $\{\widehat{E}_r^{*,*}, \widehat{d}_r\}$ も E_2 -項で潰れる。よって 2 重次数つき代数として

$$E_2^{*,*} \cong E_\infty^{*,*}, \quad \widehat{E}_2^{*,*} \cong \widehat{E}_\infty^{*,*}$$

が成り立つ。

次に E_∞ -項から $H^*(LM)$ を代数として復元するために拡張問題を考える。スペクトル系列の収束性から

$$E_\infty^{p,q} \cong F^p H^{p+q} / F^{p+1} H^{p+q}$$

がいえている。 E_∞ -項で $\gamma_{p^s}(w)^p = 0$ ということより, $\gamma_{p^s}(w)^p$ が $F^{-2p^{s+1}+1} H^*(LM)$ に入ることはいえる。しかし $\gamma_{p^s}(w)^p = 0$ が $H^*(LM)$ 上で成り立つことは一般には言えない。実際は第 2 章で見るように, EMSS 上の Steenrod 作用素を考察することで $\gamma_{p^s}(w)^p$ は $F^{-2p^s} H^*(LM)$ に属することがわかる (注意 2.2)。これから先と同様に全次数とフィルトレーションの次数を比

較して $H^*(LM)$ 上で $\gamma_{p^s}(w)^p = 0$ が示せる。こうしてコホモロジーの代数構造を完全に復元することができて次を得る⁹。

$$\begin{aligned} H^*(LM) &\cong \text{Total}E_{\infty}^{*,*} \cong \wedge(u) \otimes \Gamma[w] \otimes H^*(M) \quad (p \neq 2 \text{ または } \deg x \neq 2), \\ H^*(\Omega M) &\cong \text{Total}\tilde{E}_{\infty}^{*,*} \cong \wedge(s^{-1}x) \otimes \Gamma[\tau(x^{n+1})] \end{aligned}$$

ただし, $\deg u = \deg s^{-1}x = \deg x - 1$, $\deg w = \deg \tau(x^{n+1}) = (n+1)\deg x - 2$ であり, $\text{Total}E^{*,*}$ は $(\text{Total}E^{*,*})^r := \bigotimes_{i+j=r} E^{i,j}$ 定義される 2 重次数つき代数 $E^{*,*}$ から誘導される次数つき代数を意味する¹⁰。

先に考察したスペクトル系列の射 $\{j_r\}$ に対して j_{∞} は誘導写像 $i^* : H^*(LM) \rightarrow H^*(\Omega M)$ から引き起こされる E_{∞} -項の写像と一致するから

$$i^*(\gamma_i(w)) = \gamma_i(\tau(x^{n+1})), \quad i^*(u) = s^{-1}x, \quad i^*(x) = 0$$

がいえる。定理 1.1 のエッジ準同型写像 (例えば [G-M,] 参照) を考えれば $H^*(M)$ の生成元 x に対して $ev_0^*(x) = x$ がいえる。これより $i^*(x) = i^* \circ ev_0^*(x) = 0$ となることもわかる。

注意 1.10. EMSS $\{\hat{E}_r^{*,*}, \hat{d}_r\}$ が E_2 -項で潰れることは, 上述のような全次数, フィルトレーションの次数を比較することでも示すことができる。よって体 \mathbb{K} の標数の仮定なしに

$$H^*(\Omega M) \cong \wedge(s^{-1}x) \otimes \Gamma[\tau(x^{n+1})]$$

がいえる。上の計算の重要な点は, EMSS が単に個々のコホモロジー環の構造を明らかにするばかりではなく, 生成元が写像から誘導される環準同型写像により何処に写されるのかも明確にしているところにある。この意味でも一般に連続写像から誘導されるスペクトル系列間の写像の考察は重要であろう。

上の計算から導かれる簡単な事実をここでまとめておく。

一般に単連結空間 B 上のファイブレーション $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ が体 \mathbb{K} に関して TNCZ とすると, その定義から誘導写像 i^* は全射になる。すなわちこのファイブレーションの Leray-Serre スペクトル系列は E_2 -項で潰れる。これより $H^*(B)$ -加群として $H^*(E) \cong H^*(B) \otimes H^*(F)$ が成り立ち, 同時に誘導写像は $p^* : H^*(B) \rightarrow H^*(E)$ は単射になる。 $H^*(B)$ -加群として $H^*(E) \cong H^*(B) \otimes H^*(F)$ ならば上述の LSSS は E_2 -項で潰れる。では

p^* の単射性から TNCZ はいえるであろうか?

この問題はの反例は G. Hirsch により古く 50 年代から知られていたが, (Gottlieb の仕事 [Go] も参照) "身近" なファイブレーションもその反例を与えることが示されたのは 70 年代後半から 80 年代初頭である。以下の議論は [Smith4] における Smith の考察に基づく。

主張 1.11. M を単連結空間で, $H^*(M) \cong \mathbb{K}[x]/(x^{n+1})$, $\deg x = m$ をみたまものとする。このとき, 自由ループファイブレーション $\mathcal{FB} : \Omega M \xrightarrow{i} LM \xrightarrow{ev_0} M$ が体 \mathbb{K} に関して TNCZ であるための必要十分条件は \mathbb{K} の標数が $n+1$ を割ることである。

証明. \mathbb{K} の標数が $n+1$ を割ると仮定する。このとき仮定 1.9 のもとでの計算から次数つき代数として $H^*(LM) \cong H^*(M) \otimes H^*(\Omega M)$ がわかる。これより \mathcal{FB} の LSSS は TNCZ となる¹¹。

逆に \mathbb{K} の標数が $n+1$ を割り切らないとする。 $H^*(LM)$ に収束する EMSS の計算 (2) において, この場合は

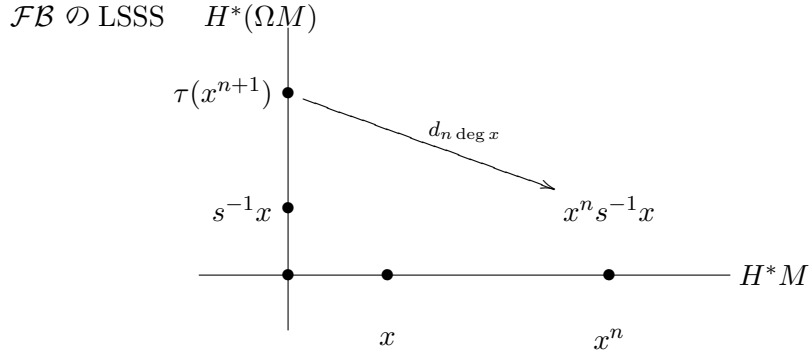
$$D(w) = \frac{\partial x^{n+1}}{\partial x} = (n+1)x^n u \neq 0$$

であるから, $\dim H^{\deg x^n u - 1}(LM) < \dim(H^*(M) \otimes H^*(\Omega M))^{\deg x^n u - 1}$ となり \mathcal{FB} は \mathbb{K} に関して TNCZ ではない。□

⁹実際は, 次数の評価比較だけでは完全に復元できない場合があり, それが括弧の条件として表れる。([K-Y, Proof of Theorem 2.2, Remark 2.6] 参照) 空間の代数的模型の一つである TV-模型の利用により, ここでの仮定 1.9 のもとでは括弧の条件なしでこの同型が成立することがいえる。([N-T] 参照)

¹⁰ \mathbb{K} の標数が 0 であるときは, 注意で述べたように $\Gamma[w]$ を $\mathbb{K}[w]$ と考えて良く, この場合 $d_r(w)$ は全次数が奇数であるが $E_2^{0, \text{odd}} = 0$ より $d_r(w) = 0$ となる。結局, 拡張問題を考える必要はなく, $\Gamma[w]$ を $\mathbb{K}[w]$ で置き換えて 2 つの同型がいえる。

¹¹先の同型はベクトル空間としての同型で十分。



注意 1.12. $n+1$ を \mathbb{K} の標数が割らない場合は, LM の \mathbb{K} -係数コホモロジー環はより複雑な形を持つ (第 3 章の計算や [K-Y, Theorem 2.2] を参照)。

注意 1.13. 単連結空間 M でその \mathbb{K} -係数コホモロジー環が単生成外積代数である場合を考える, すなわち $H^*(M) \cong \wedge(y)$ ($\deg y$ は奇数) とする。例えば $M = S^{2n+1}$ ($n \geq 1$) が考えられる。このとき定理 1.1 と命題 1.6, 命題 1.7 をそれぞれ用いて, 代数としての同型

$$H^*(\Omega M) \cong \Gamma[s^{-1}y], \quad H^*(LM) \cong \wedge(y) \otimes \Gamma[\nu]$$

を得る。ただし, $\deg s^{-1}y = \deg \nu = \deg y - 1$ である。考える 2 つの EMSS $\{\widehat{E}_r^{*,*}, \widehat{d}_r\}$ と $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ が E_2 -項で潰れることと拡張問題が全次数とフィルトレーションの次数計算で解けることは先の計算と同様である¹²。

注意 1.14. 一般に $H^*(\Omega M)$ に収束する EMSS $\{\widehat{E}_r^{*,*}, \widehat{d}_r\}$ には微分 Hopf 代数の構造が入る。(微分 Hopf 代数については [C] 参照) さらに事実: 「 $d_r(c) = 0$, $|c| < |a|$ ならば $d_r(a)$ は原始的である」を用いることで微分を特定できる場合がある。

また $H^*(\Omega M)$ が次数つき可換 Hopf 代数であることから Hopf-Borel の定理 [M-M, 7.11 Theorem] を利用して E_∞ -項から拡張問題を解くことができる場合もある。例えば, [K2, K3] 参照。

注意 1.15. もちろん空間的な特徴を利用してループ空間のコホモロジーの計算も可能である。例えばファイブレーション $S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ からファイブレーション $\Omega S^{2n+1} \rightarrow \Omega \mathbb{C}P^n \rightarrow S^1$ を得る。このファイブレーションがホモトピー切断を持つことからホモトピー同値

$$\Omega \mathbb{C}P^n \simeq S^1 \times \Omega S^{2n+1}$$

を得ることができる。よって $M = \mathbb{C}P^n$ の場合, 注意 1.13 とこのホモトピー同値を用いて $H^*(\Omega \mathbb{C}P^n)$ を決定できる。すなわち注意 1.10 の結果を得ることができる。

EMSS と LSSS が E_2 -項で潰れるという条件はそれぞれ密接に関連する。例えば単連結空間 B 上のファイブレーション $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ の LSSS が E_2 -項で潰れる場合, $H^*(B)$ -加群として $H^*(E) \cong H^*(B) \otimes H^*(F)$ が成り立つ。またファイブレーションはプルバック図式

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ * & \longrightarrow & B \end{array}$$

と見なせるから定理 1.1 から $H^*(F)$ に収束する EMSS $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ で

$$E_2^{*,*} \cong \mathrm{Tor}_{H^*(B)}^{*,*}(\mathbb{K}, H^*(E)) \xrightarrow{\mathrm{alg}} H^*(F)$$

¹²詳細は [K-Y, Theorem 2.1] 参照。より一般の空間に対してその自由ループ空間のコホモロジーの計算は 1990 年代後半からほとんど進んでいない。その頃 Chas-Sullivan により創始されたストリクトポロジーにおいて, 向きづけられた多様体のループホモロジー (自由ループ空間ホモロジーでペアー・オブ・パンツから得られるストリング作用, ループ積を持つもの) の考察がホットな話題ではあるが, こちらの計算もなかなか進んでいないのが現状である。

となるものが得られる。今の場合 $H^*(E)$ は $H^*(B)$ -射影的加群 (実際は自由加群) であるから トーション積の定義から, $p < 0$ ならば $E_2^{p,*} = 0$ となり, EMSS $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ は E_2 -項で潰れる。EMSS は第 2 象限型であることに注意。こうして次を示すことができた。

命題 1.16. 単連結空間 B 上のファイブレーション $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ の LSSS が E_2 -項で潰れるならば, 同じファイブレーションから得られる定理 1.1 の EMSS も E_2 -項で潰れる。

第 2 章でバー型, コバー型 EMSS の応用として一つ定理を証明する。その時に用いるスペクトル系列の自明性に関する命題をここで述べておく。3つのスペクトル系列の関係を次の命題は示している。

再び図式 (1) の前面の EMSS を $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, 後面の EMSS を $\{\widehat{E}_r^{*,*}, \widehat{d}_r\}$ とおく。また左面の LSSS を $\{\overline{E}_r^{*,*}, \overline{d}_r\}$ とおく。このとき

命題 1.17. [K1, Proposition 1.7] M を単連結空間であり $H^*(M)$ は定義 1.4 の CGI-代数であると仮定する。さらに任意の i, j に対して $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/(\rho_1, \dots, \rho_m)$ 上 $\frac{\partial \rho_i}{\partial x_j} = 0$ とする。このとき EMSS $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ が E_2 -項で潰れるための必要十分条件は EMSS $\{\widehat{E}_r^{*,*}, \widehat{d}_r\}$ と LSSS $\{\overline{E}_r^{*,*}, \overline{d}_r\}$ が E_2 -項で潰れることである。

さてここでコバー型 EMSS の E_2 -項の計算 (コバー分解と捻れテンソル積) [K-M-S][K-M-N, Section 5] について簡単に言及しておく。

A を微分 Hopf 代数, N, L をそれぞれ右, 左微分 A -余加群とする。コテンサー積の導来関手

$$\mathrm{Cotor}_A(N, L)$$

は (その定義より) L の左 A -余加群としての入射的分解にコテンサー $N \square_A -$ を適用し, ホモロジーをとることで得られる。一般に L の左 A -余加群としての入射的分解としては,

$$0 \rightarrow L \rightarrow A \otimes L \rightarrow A \otimes A \otimes L \rightarrow \dots$$

という形のコバー分解 ([E-M]) を考えることができるが, トーション積と同様, Koszul 分解のようなより経済的な入射分解がほしい。体 \mathbb{K} を自明な左 A -余代数とすると, \mathbb{K} に対するそのような分解の候補として上げられるのが”捻れテンソル積”である。

A の捻れテンソル積は適切な次数つきベクトル空間 V が与えるテンソル代数 $T(sV)$, およびそのあるイデアル I を用いて左 A -余加群としては $A \otimes T(sV)/I$ で定義される。そしてその微分代数構造は適切な線形写像 $\theta: A \rightarrow sV$ を用いて”捻られて”定義される。

[K-M-S] で見られるように捩じれテンソル積で与えられる \mathbb{K} の入射分解は, Lie 群 G の分類空間 BG のコホモロジー環を定理 1.2 を用いて計算する場合に威力を発揮した。ここでは捻れテンソル積の一番簡単な場合を考えることにする。

例 1.18. G を $H^*(G) \cong \wedge(x_1, \dots, x_l) =: A$ をみたく Lie 群とする。ただし $\deg x_j$ は奇数であり x_i は原始的な元とする; すなわち A の余積 Δ に関して $\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$ である。第一章のユニタリ群 $U(n)$ はこのような例である。このとき普遍 G バンドル $G \rightarrow EG \rightarrow BG$ を考える。 $BG = EG \times_G *$ であるから定理 1.2 を適用すると EMSS $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ で

$$E_2^{*,*} \cong \mathrm{Cotor}_{H^*(G)}^{*,*}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \xrightarrow{\mathrm{alg}} H^*(BG)$$

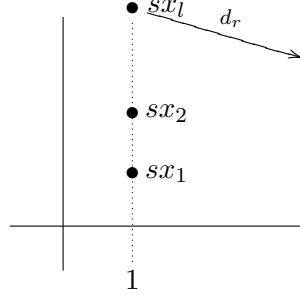
となるものを得ることができる。 \mathbb{K} の左 A -余加群としての入射分解で

$$0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow A \otimes (\mathbb{K}[sx_1, sx_2, \dots, sx_l], \partial)$$

の形を持つものが存在する。ただし $\partial(sx_j) = x_j$, $\mathrm{bideg} \, sx_j = (1, \deg x_j)$ である。したがって

$$\mathrm{Cotor}_{H^*(G)}^{*,*}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \cong H(\mathbb{K} \square_A A \otimes \mathbb{K}[sx_1, \dots, sx_l], 1 \square_A \partial = 0) \cong \mathbb{K}[sx_1, \dots, sx_l]$$

となる。各 sx_j の全次数は偶数より、この EMSS は E_2 -項で潰れ、2 重次数付き代数として同型 $E_2^{*,*} \cong E_\infty^{*,*}$ を得る。



E_∞ -項は多項式環であるから拡張問題も解けて、結局 \mathbb{K} -代数として次を得る。

$$H^*(BG) \cong \mathbb{K}[sx_1, \dots, sx_l], \deg sx_i = \deg x_i + 1$$

注意 1.19. ファイブレーション $\Omega BG \rightarrow PBG \rightarrow BG$ と次の事実を用いれば定理 1.1 のスペクトル系列を適用して、 $H^*(G) \cong \wedge(s^{-1}sx_1, \dots, s^{-1}sx_l)$ を得ることができ、もとの $H^*(G)$ にもどる。

事実 1.20. 位相群 G に対して Hopf 空間として $G \simeq \Omega BG$. [May, Section 8] 参照

2 重複体をもとに構成されるスペクトル系列 (EMSS の仲間達) で著者と親交があるものを列挙してこの章を終える。どのスペクトル系列の計算もほとんど進んでいないのが現状である。これらのスペクトル系列を使った具体的計算や関連する話題への応用が今後期待される。

- 1) 写像空間のコホモロジーに収束する Bousfield-Peterson-Smith SS[C-K] (E_2 -項はテンソル積の左随伴関手である Lannes 関手で表され、単体的分解を用いて原理的には計算できる [S, 7.1].)
- 2) 特異チェイン代数の Hochschild コホモロジーに Batalin-Vilkovisky 代数として収束する SS [K6] ではその構成と命題 1.7 を利用していくつかの計算が実行されている。)
- 3) Chas-Sullivan ループホモロジーに収束する EMSS [K-Me-N] (LSSS は [C-J-Y] 参照。)
- 4) 小圏のコホモロジーに収束する Čech-de Rham SS (Mayer-Vietoris SS) [B-T][B-W][M]

2. EMSS の応用と計算の助っ人, 作用素

この章では EMSS 上の Steenrod 作用素に関する命題をまず述べる。その EMSS の計算への直接的な応用を解説した後、加群微分子と Steenrod 代数との両立性を用いて、Lie 群 G の分類空間 BG の自由ループ空間のコホモロジー環を計算する。またや基点付きループ空間のコホモロジーの余可換性についても考察する。

加群微分子はスペクトル系列の計算においてさらに貢献することが期待される。計算結果の応用は [K-S] にも解説がある。

定理 2.1. [R][Mori][Si][Smith3][C-K, Appendix] 基礎体 \mathbb{K} は有限体 \mathbb{F}_p であるとする。ただし p は素数とする。このとき定理 1.1 の EMSS は Steenrod 代数 $\mathcal{A}(p)$ の作用を持つ。すなわち $E_r^{*,*}$ 項は $\mathcal{A}(p)$ -代数構造を持ち、各微分 d_r は Steenrod 作用素と可換である。さらに $\mathcal{A}(p)$ -代数として同型 $E_\infty^{*,*} \cong E_0^{*,*}(H^*(E_{f,p}))$ が成り立つ。特に

$$\begin{cases} \beta^\varepsilon \varphi_{EM}^i : E_r^{l,s} \rightarrow E_r^{l,s+2i(p-1)+\varepsilon} \\ Sq_{EM}^i : E_r^{l,s} \rightarrow E_r^{l,s+i} \quad (p=2) \end{cases}$$

が成立する。また E_1 -項では、バー分解を用いて φ_{EM}^k の作用は次のように表される。

$$\varphi_{EM}^k(a[x_1 | \cdots | x_m]b) = \sum_{l+i_1+\cdots+i_m+s=k} \varphi^l a[\varphi^{i_1}x_1 | \cdots | \varphi^{i_m}x_m] \varphi^s b$$

注意 2.2. 第 1 章における仮定 1.9 のもとでの計算を思い出す。その計算で $\gamma_{p^s}(w)^p$ が $F^{-2p^s} H^*(LM)$ に属すことを用いているが、これは E_∞ -項で

$$\gamma_{p^s}(w)^p = \wp_{EM}^{(1/2)p^s(\deg \rho_i - 2)} \gamma_{p^s}(w)$$

が成り立ち、右辺は定理 2.1 より $F^{-2p^s} H^*(LM)$ に入っていることから示せる。Steenrod 作用素は EMSS 上 “縦” 作用を引き起こしていることに注意されたい。

EMSS の E_2 -項をバー分解を用いて表示した場合は、定理 2.1 よりその上で働く Steenrod 作用素を明確に記述できることになる。しかし代数構造を見る場合は、命題 1.6, 命題 1.7 で与えた Koszul 分解の方が適している。そこで「バー」の言語を「Koszul」の言語にまたは逆に翻訳する辞書が必要になる。その一部をここで紹介する。

補題 2.3. ([K-Y, Lemma 2.8], [K1, Lemma 1.5]) A を定義 1.4 の GCI-代数とし、 $\mathcal{K} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K} \rightarrow 0$ を命題 1.6 の Koszul 分解とする。このとき擬同型 $\Psi: B^\bullet(\mathbb{K}, A) \rightarrow \mathcal{K}$ で

$$\Psi([x_i | \cdots | x_i]a) = \gamma_r(s^{-1}x_i)a$$

をみたすものが存在する。

定理 2.1 と補題 2.3 を用いて、ある基点付きループ空間のコホモロジーの具体的な計算を行う。

例 2.4. M を単連結空間で $\mathcal{A}(2)$ -代数として $H^*(X; \mathbb{F}_2) \cong H^*(SU(3); \mathbb{F}_2) \cong \wedge(e_3, e_5)$ であるとする。すなわち $Sq^2 e_3 = e_5$ が成立すると仮定する。このとき次数つき代数として

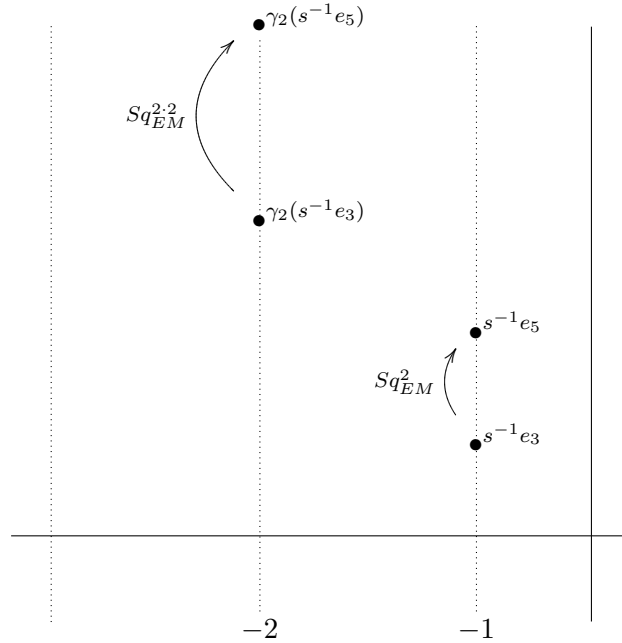
$$(3) \quad H^*(\Omega M; \mathbb{F}_2) \cong H^*(\Omega SU(3); \mathbb{F}_2) \cong \bigotimes_{i \geq 1} \mathbb{F}_2[\gamma_{2^i}(s^{-1}e_3)] / (\gamma_{2^i}(s^{-1}e_3)^4), \quad \deg s^{-1}e_3 = 2$$

となることを以下で示そう。

自由ループファイブレーション $\Omega M \rightarrow PM \rightarrow M$ に定理 1.1 を適用して得られる EMSS を $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ とする。この EMSS は $H^*(\Omega M)$ に代数として収束し、2 重次数つき代数として

$$\begin{aligned} E_2^{*,*} &\cong \text{Tor}_{H^*(M)}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \cong \Gamma[s^{-1}e_3, s^{-1}e_5] \\ &\cong \bigotimes_{i \geq 1} \mathbb{F}_2[\gamma_{2^i}(s^{-1}e_3)] / (\gamma_{2^i}(s^{-1}e_3)^2) \otimes \bigotimes_{i \geq 1} \mathbb{F}_2[\gamma_{2^i}(s^{-1}e_5)] / (\gamma_{2^i}(s^{-1}e_5)^2) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 $\text{bideg}(\gamma_{2^i}(s^{-1}e_n)) = (-2^i, 2^i(n-1))$ である。どの生成元も全次数は偶数であることから、この EMSS は E_2 -項で潰れる。よって $E_2^{*,*} \cong E_\infty^{*,*}$ である。



$\gamma_{2^i}(s^{-1}e_3)^2$ および $\gamma_{2^i}(s^{-1}e_5)^2$ に関する拡張問題を解く。補題 2.3 より

$$\gamma_{2^i}(s^{-1}e_3)^2 = [e_3 | \cdots | e_3] \quad (2^i\text{-times})$$

となるから、定理 2.1 より E_∞ -項で

$$Sq_{EM}^{2i,2} \gamma_{2i}(s^{-1}e_3) = Sq_{EM}^{2i,2}[e_3 | \cdots | e_3] = [Sq^2 e_3 | \cdots | Sq^2 e_3] + \text{"other terms"}$$

と表せる。また Steenrod 作用素の非安定性 ($\deg x < i$ のとき $Sq^i x = 0$) より "other terms" は零となる。こうして $H^*(\Omega M)$ 上では

$$\gamma_{2i}(s^{-1}e_3)^2 = Sq^{2i,2} \gamma_{2i}(s^{-1}e_3) = \gamma_{2i}(s^{-1}e_5) + \eta$$

と表せる。ただし $\eta \in F^{-2i+1}H^*(\Omega M)$ である。第 1 章で考察した、全次数とフィルトレーションの次数の比較により $\eta = 0$ 、さらに $H^*(\Omega M)$ 上で $\gamma_{2i}(s^{-1}e_5)^2 = 0$ が示せる。こうして拡張問題が全て解けて、(3) を得る。

以上の計算からわかるように、 $H^*(\Omega SU(3); \mathbb{F}_2)$ は $SU(3)$ のコホモロジーの情報のみを用いて計算できることになる。

分類空間の自由ループ空間 LBG のコホモロジーや S^1 の位相和を境界に持つコボルディズムから BG への写像全体がつくる空間のコホモロジーの考察を始める前に、その計算の動機について解説する。

ストリングトポロジーの適用範囲は近年向き付けられた多様体から Poincaré 双対空間を含む Gorenstein 空間まで広がっている ([F-T])。特に Lie 群の分類空間は Gorenstein 空間となりストリング作用素が多様体の場合と同様、次のように定義できる。まず、 S^1 の位相和を境界に持つ (ジナス g , in-boundary p 個, out-boundary q 個の) コボルディズム $\Sigma_{g,p+q}$ を考える。

$$\coprod^q S^1 \xrightarrow{\rho_{in}} \Sigma_{g,p+q} \xleftarrow{\rho_{out}} \coprod^q S^1$$

この図式に関手 $\mathcal{F}(-, BG)$ を適用して次の空間の系列を得る。

$$LBG^{\times p} = \mathcal{F}(\coprod^q S^1, BG) \xleftarrow{\rho_{in}^*} \mathcal{F}(\Sigma_{g,p+q}, BG) \xrightarrow{\rho_{out}^*} \mathcal{F}(\coprod^q S^1, BG) = LBG^{\times q}$$

さらにコホモロジーと ρ_{in}^* の shriek 写像 (wrong way 写像) を用いて¹³

$$(H^*(LBG)^{\otimes p})^{*+(\dim G) \cdot \chi(\Sigma_{g,p+q})} \xleftarrow{\rho_{in}^!} H^*(\mathcal{F}(\Sigma_{g,p+q}, BG)) \xleftarrow{H(\rho_{out}^*)} H^*(LBG)^{\otimes q}$$

を得る。この写像の双対がコボルディズム $\Sigma_{g,p+q}$ に対応するストリング作用素である。これらの作用素が位相的量子場理論 (TQFT) をつくること、より一般にホモロジー的共形場理論 (HCFT) を与えることが³、近年 Chataur, Menichi[C-M] により示された。こうしてストリング作用素を明確に決定するための第一段階として、入れ物であるコホモロジー $H^*(LBG)$ や $H^*(\mathcal{F}(\Sigma_{g,p+q}, BG))$ を求めることは重要になる。

ではそれらの計算で用いる EMSS 以外の道具を準備しよう。 A から次数つき左 A -加群 L への次数 -1 の準同型 $\mathcal{D} : A \rightarrow L$ が A の任意の元 a, b に対して

$$\mathcal{D}(ab) = (-1)^{(\deg a+1) \deg b} b \mathcal{D}(a) + (-1)^{\deg a} a \mathcal{D}(b)$$

をみたすときこの写像 \mathcal{D} を L に値を持つ A の加群微分子 (module derivation) という。

命題 2.5. 評価写像 $ev : S^1 \times LX \rightarrow X$ を $ev(t, \gamma) = \gamma(t)$ と定義し、 S^1 に沿った積分写像 $\int_{S^1} : H^*(S^1 \times LX) \rightarrow H^{*-1}(LX; \mathbb{F}_p)$ を $\int_{S^1}(e \otimes v) = v$ で定義する。ただし e は $id \in \pi_1(S^1)$ から Hurewicz 準同型を経由して得られる $H^1(S^1)$ の生成元である。このとき合成写像

$$\mathcal{D}_X := \int_{S^1} \circ ev^* : H^*(X) \rightarrow H^{*-1}(LX; \mathbb{F}_p)$$

は $H^*(LX; \mathbb{F}_p)$ に値を持つ $H^*(X)$ の加群微分子であり、Steenrod 代数の作用と可換である。

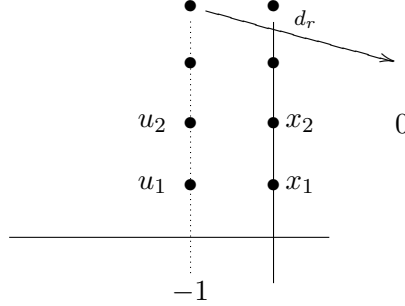
仮定 2.6. $H^*(BG) \cong \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] =: A$ 、ただし \mathbb{K} の標数が 2 でないときは各 i に対して $\deg x_i$ は偶数。

¹³ このような shriek 写像 (一般的には非自明な) の存在が、分類空間やより一般に Gorenstein 空間でも保証されている ([F-T])。

この仮定のもと $H^*(LBG)$ を考察しよう。定理 1.1 の $H^*(LBG)$ に代数として取束する EMSS を $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ とする。このとき命題 1.7 より 2 重次数付き代数として次の同型を得る。

$$E_2^{*,*} \cong \text{Tor}_{A \otimes A}^{*,*}(A, A) \cong \wedge(u_1, \dots, u_n) \otimes \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$$

ただし, $\text{bideg } u_i = (-1, \deg x_i)$ である。



生成元のフィルトレーション次数は 0 または -1 であるからこの EMSS は E_2 -項で潰れて, $E_\infty^{*,*} \cong E_2^{*,*}$ となる。よって $H^*(BG)$ -代数としての同型

$$(4) \quad H^*(LBG) \cong \Delta(u_1, \dots, u_n) \otimes \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$$

を得る。ただし, $\Delta(u_1, \dots, u_n)$ は 2-単純系を表す。すなわち $u_1^{\varepsilon_1} \cdots u_n^{\varepsilon_n}$ (ε_i は 0 または 1) で生成される \mathbb{K} 上のベクトル空間で $\varepsilon_i + \varepsilon'_i = 0$ または 1 のときのみ, $u_1^{\varepsilon_1} \cdots u_n^{\varepsilon_n} \cdot u_1^{\varepsilon'_1} \cdots u_n^{\varepsilon'_n} = u_1^{\varepsilon_1 + \varepsilon'_1} \cdots u_n^{\varepsilon_n + \varepsilon'_n}$ である。したがって, $H^*(LBG)$ は次数付き可換なので \mathbb{K} の標数が 2 でないならば拡張問題は解けて, 代数として

$$(5) \quad H^*(LBG) \cong \wedge(u_1, \dots, u_n) \otimes \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n],$$

$\deg u_i = \deg x_i - 1$ となる。 \mathbb{K} が素体 \mathbb{F}_2 のとき拡張問題を解くのは些か難しい。 u_i^2 の行き先を決めなければならないからである。そこで次の事実を用いる。

事実 2.7. [K-K] 任意の i に対して $u_i = \mathcal{D}_{BG} x_i$

これで EMSS から定まる生成元をある意味, 幾何的に特徴付けたことになる。こうして命題 2.5 から

$$u_i^2 = Sq^{\deg x_i - 1} u_i = Sq^{\deg x_i - 1} \mathcal{D}_{BG} x_i = \mathcal{D}_{BG} Sq^{\deg x_i - 1} x_i$$

となる。 \mathcal{D}_{BG} は加群微分子であるから $Sq^{\deg x_i - 1}$ の作用で u_i^2 の行き先が決まる, すなわち u_i^2 は $\mathcal{D}_{BG} x_j$ と x_j ($j = 1, \dots, n$) で表記出来ることになる。よって拡張問題が全て解けて \mathbb{K} -代数としての同型

$$(6) \quad H^*(LBG) \cong \mathbb{F}_2[\mathcal{D}_{BG} x_1, \dots, \mathcal{D}_{BG} x_n] \otimes \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n] / ((\mathcal{D}_{BG} x_i)^2 + \mathcal{D}_{BG} Sq^{\deg x_i - 1} x_i)$$

を得る。

次に $H^*(\mathcal{F}(\Sigma_{g,p+q}, BG))$ の代数構造を仮定 2.6 のもとで決定しよう。

事実 2.8. (例えば [C-M]) $\Sigma_{g,p+q} \simeq \vee^{-\chi(\Sigma_{g,p+q})+1} S^1$, ただし $-\chi(\Sigma_{g,p+q}) = 2g + p + q - 2$

このことに注意すると $\mathcal{F}(\Sigma_{g,p+q}, BG) \simeq \mathcal{F}(\vee^N S^1, BG)$ となる, ただし $N = -\chi(\Sigma_{g,p+q}) + 1$ である。そこで次のプッシュアウト図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} \vee^N S^1 & \longleftarrow & S^1 \\ \uparrow & & \uparrow \\ \vee^{N-1} S^1 & \longleftarrow & * \end{array}$$

この図式に関手 $\mathcal{F}(-, BG)$ を施して, プルバック図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\vee^N S^1, BG) & \longrightarrow & LBG \\ \downarrow & & \downarrow \text{ev}_0 \\ \mathcal{F}(\vee^{N-1} S^1, BG) & \longrightarrow & BG \end{array}$$

を得る。この図式に定理 1.1 を適用して、 $H^*(\mathcal{F}(\vee^N S^1, BG))$ に代数として収束する EMSS $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ で

$$E_2^{*,*} \cong \mathrm{Tor}_{H^*(BG)}^{*,*}(H^*(\mathcal{F}(\vee^{N-1} S^1, BG)), H^*(LBG))$$

となるものを得る¹⁴。先の同型 (4) より \mathbb{K} の標数によらず自由 $H^*(BG)$ -加群である。したがって、 $j < 0$ のとき $E_2^{j,*} = 0$ 、 $E_2^{0,*} \cong H^*(\mathcal{F}(\vee^{N-1} S^1, BG)) \otimes_{H^*(BG)} H^*(LBG)$ となり、 $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ は E_2 -項で潰れ、さらに拡張問題も解けて、帰納的な考察で次の代数としての同型を得る。

$$H^*(\mathcal{F}(\vee^N S^1, BG)) \cong H^*(\mathcal{F}(\vee^{N-1} S^1, BG)) \otimes_{H^*(BG)} H^*(LBG) \cong \bigotimes_{H^*(BG)}^N H^*(LBG)$$

同型 (5), (6) により右辺の代数は決定できる。もちろん $H^*(LBG)$ 上のストリング作用素を決定するには $H(\rho_{out}^*)$ や $\rho_{in}^!$ の振る舞いをここで決定したコホモロジーの表記で考察しなければならない。このストリング作用素の決定は今後の課題である。

EMSS の微分に関して特に、Eilenberg-MacLane 空間のコホモロジーを利用した微分の決定方法は [Smith2, Smith5] が参考になる。そこでは Bockstein Lemma の証明でも重要になる Universal Example と同様の議論が展開されている。

例えば次の定理が成り立つ。

定理 2.9. [Smith5] M を単連結空間で代数としての同型 $H^*(M; \mathbb{F}_2) \cong \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{F}_2[x_i]/(x_i^{2^{n_i}})$ が成り立つとする。もし Sq^1 が $H^*(M; \mathbb{F}_2)$ 上で自明ならば、プルバック図式

$$\begin{array}{ccc} LM & \longrightarrow & M^I \\ \downarrow & & \downarrow ev_0 \times ev_1 \\ M & \xrightarrow{\Delta} & M \times M \end{array}$$

に対する定理 1.1 の $H^*(LM; \mathbb{F}_2)$ 収束する EMSS は E_2 -項で潰れる。

この定理とバー型、コバー型の EMSS を用いて基点付きループ空間コホモロジーの余可換性に関する定理を示してこの章を終える。

一般に Lie 群 G が与えられると Hopf-Borel の定理 [M-M, 7.11 Theorem] により $H^*(G; \mathbb{F}_p) \cong \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{F}_p[x_i]/(x_i^{p^{n_i}})$ と表せる。また ΩG はホモトピー可換より Hopf 代数 $H^*(\Omega G; \mathbb{F}_p)$ は余可換である。一般に M が Hopf 空間でなくても $H^*(M)$ の代数構造から $H^*(\Omega M)$ の余可換性を示すことができる場合がある。

定理 2.10. M を単連結空間 $H^*(M; \mathbb{F}_2) \cong \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{F}_2[x_i]/(x_i^{2^{n_i}})$ が成り立つとする。もし Sq^1 が $H^*(M; \mathbb{F}_2)$ 上で自明ならば、 $H^*(\Omega M; \mathbb{F}_2)$ は余可換である。

この定理を証明するためにまず次の事実を思い出す。

事実 2.11. $\exists \eta: EG \times_{Ad} G \xrightarrow{\cong} EG \times_{Ad} \Omega BG \xrightarrow{\cong} LBG$, ここで $Ad: G \times G \rightarrow G$ は G の G への随伴作用 $Ad(g)h = ghg^{-1}$ を表す。(例えば [C-S, Corollary 3.4] 参照)。

M に対して Milnor [Mi] の考察からある位相群 G が存在して、Hopf 空間として $\Omega M \simeq G$ となる。この位相群 G に Borel 構成を適用すると事実 2.11 により次のファイブレーションを得る。

$$\begin{array}{ccccc} \Omega G \simeq G & & & & \\ \downarrow j & & & & \\ EG \times_{Ad} G & \xrightarrow{\cong} & EG \times_{Ad} \Omega BG & \xrightarrow{\cong} & LBG \simeq LM \\ \downarrow & & & & \\ M \simeq BG & & & & \end{array}$$

こうして Borel 構成 $EG_{Ad}G$ に定理 1.2 を適用して第 1 象限型 EMSS $\{{}_c E_r^{*,*}, {}_c d_r\}$ で

$${}_c E_2^{*,*} \cong \mathrm{Cotor}_{H^*(\Omega M)}^{*,*}(\mathbb{K}, H^*(\Omega M)) \xrightarrow{\mathrm{alg}} H^*(EG \times_{Ad} G) \cong H^*(LM)$$

¹⁴[K5] ではここでの考え方をさらに進めて、向きづけ可能 (不可能) 閉曲面を定義域に BG を値域に持つ写像空間のコホモロジー環が考察されている。実際、閉曲面を $\vee^k S^1$ にデスクを貼付ける接着空間と考えてプッシュアウト図式から上述のようなプルバック図式を構成し EMSS を適用している。

となるものを得る。

定理 2.10 の証明. 定理 2.9 より $H^*(LM)$ に収束する第 2 象限型 EMSS $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ は E_2 -項で潰れる。したがって命題 1.17 より $\{\bar{E}_r^{*,*}, \bar{d}_r\}$ は E_2 -項で潰れる。すなわち上の図式における縦のファイブレーションは \mathbb{F}_2 に関して TNCZ である。こうして誘導写像 $j^* : H^*(EG \times_{Ad} G) \rightarrow H^*(G)$ は全射となる。第 1 象限型 EMSS $\{{}_cE_r^{*,*}, {}_c d_r\}$ のエッジ準同型写像を考えると次の可換図式を得る

$$\begin{array}{ccc} H^*(EG \times_{Ad} G) & \xrightarrow{j^*} & H^*(G) \\ \downarrow & & \parallel \\ {}_cE_\infty^{0,*} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & {}_cE_2^{0,*} \longrightarrow {}_cE_1^{0,*} \end{array}$$

j^* は全射より微分 $d_1 = Ad^* : H^*(G) \rightarrow H^*(G) \otimes \bar{H}^*(G)$ は自明でなければならない。すなわちこれは第一座標への射影 $G \times G \rightarrow G$ を pr_1 とすると $pr_1^* = Ad^*$ を意味する。 Ad は随伴作用であるから $H^*(\Omega M) \cong H^*(G)$ は余可換である。□

注意 2.12. $M = \mathbb{C}P^{2^n}$ はその \mathbb{F}_p -係数 (p は奇素数) のコホモロジーの代数構造を考えれば前出の Hopf-Borel の定理から M は Hopf 空間ではないことがわかる。しかし定理 2.10 より $H^*(\Omega M; \mathbb{F}_2)$ は余可換である。

3. 次数付き微分代数のホモロジーの計算方法 (番外)

スペクトル系列の計算では、微分代数のホモロジーを代数として計算する場面によく直面する。この章では例を用いてそのようなホモロジーを計算する手法を紹介しよう¹⁵。これらは有理ホモトピー論における空間 M の Sullivan 極小模型からそのホモロジー、すなわち M の有理係数コホモロジー環を計算する場合にも応用できる。この章では基礎体 \mathbb{K} の標数は 0 とする。また次数つきベクトル空間 V で生成される可換自由代数を $\wedge(V)$ と表す。すなわち

$$\wedge(V) = E(V^{odd}) \otimes \mathbb{K}[V^{even}]$$

($E(-)$ は外積代数を意味する¹⁶) となる。次の微分代数 (A, d) を考える：

$$(A, d) = (\wedge(\alpha, \rho, \bar{\alpha}, \bar{\rho}), d(\alpha) = d(\bar{\alpha}) = 0, d(\rho) = \alpha^2, d(\bar{\rho}) = 2\alpha\bar{\alpha})$$

ただし、 $\deg \alpha = 2m$, $\deg \rho = 4m - 1$, $\deg \bar{\alpha} = 2m - 1$, $\deg \bar{\rho} = 4m - 2$ である。

注意 3.1. この微分代数 (A, d) は S^{2m} の Sullivan 極小模型 $(\wedge(\alpha, \rho), d(\rho) = \alpha^2)$ から得られる、 LS^{2m} の Sullivan 模型である。([F-H-T, Example 1, page 206]) したがって代数として

$$H^*(LS^{2m}; \mathbb{K}) \cong H(A, d)$$

が成立する。

この章の目的は $H(A, d)$ の代数構造、生成元を明らかにすることである。早速そのホモロジー環の計算を始めよう。

ステップ 1 (A の元に重みをつけて A にフィルトレーションを導入する)：まず、 $\text{weight}(\bar{\alpha}) = 1$, $\text{weight}(z) = 0$ ($z = \rho, \bar{\rho}, \alpha$) として重みをつける。生成元の積で表される元は $\text{weight}(uv) = \text{weight}(u) + \text{weight}(v)$ として生成元の各重みの和で定義する。微分を保つ A の減少フィルトレーション $F = \{F^i\}$ を次で定義する¹⁷。

$$F^i := \{u \in A \mid \text{weight}(u) \geq i\}$$

このとき、誘導されたスペクトル系列 $\{E_r, d_r\}$ の E_0 -項である微分代数 $(E_0 = \sum F^i/F^{i+1}, d_0)$ のホモロジー、すなわち E_1 -項は次の形を持つ

$$(E_1, d_1) \cong (\mathbb{K}[\alpha]/(\alpha^2) \otimes \wedge(\bar{\alpha}) \otimes \mathbb{K}[\bar{\rho}], d_1(\bar{\rho}) = 2\alpha\bar{\alpha})$$

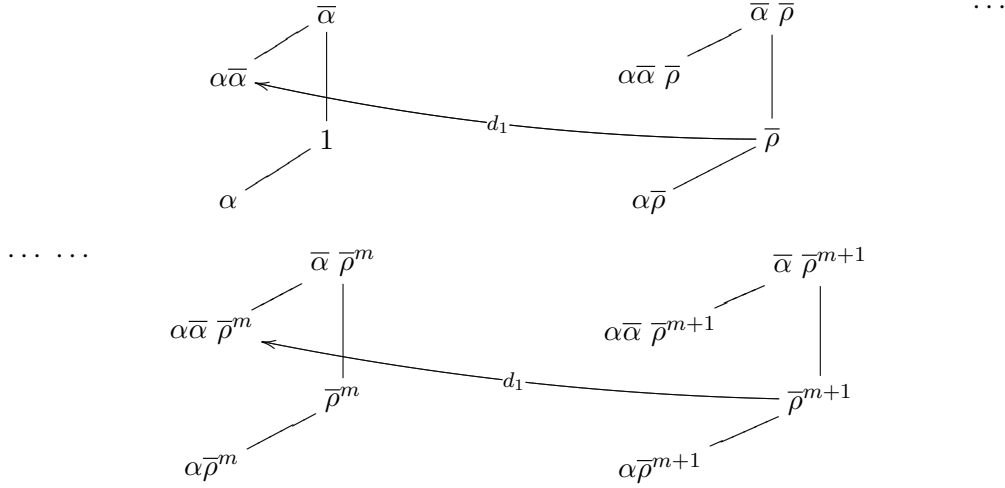
¹⁵この計算手法は [K-M-N, Section 7] で詳しく述べられている。

¹⁶前章では外積代数を $\wedge(-)$ と表していたが、有理ホモトピー論の慣例に従い、この章では $\wedge(-)$ は可換自由代数を表すものとする。

¹⁷すなわち $dF^i \subset F^i$ が成り立つ。

$d(\bar{\rho}) = 2\alpha\bar{\alpha}$ はフィルトレーションを一つ上げる。よって, $E_0 = \sum F^i/F^{i+1}$ 上では $d(\bar{\rho}) = 0$ となることに注意する。(このステップではフィルトレーションから誘導されるスペクトル系列の各項の微分で非自明なものが「一つ」になるようにそのフィルトレーションを定める。)

ステップ2 (代数構造を表す「軸」を書いて, その上にベクトル空間としての基底をすべて並べる):



ステップ3 (代数構造に注意しながらスペクトル系列を計算する): どの基底がホモロジー上で消えるかが軸の図式からわかり

$$E_2 \cong \frac{\mathbb{K}[\alpha] \otimes \wedge(\bar{\alpha})}{(\alpha\bar{\alpha}, \alpha^2)} \oplus \mathbb{K}\langle \bar{\alpha} \bar{\rho}^l \mid l \geq 1 \rangle \oplus K\langle \alpha \bar{\rho}^l \mid l \geq 1 \rangle$$

を得る。ただし (B, ε) が単位元を持つ添加代数で, N が単位元を持たない代数とするとき $B \oplus N$ の代数構造は $1 \cdot n = n$, $mn = 0$ ($n \in N$, $m \in \text{Ker}\varepsilon$) で与えられる。フィルトレーションを2つ上げる微分はないから E_r -項の微分は自明 ($r \geq 2$) となる。こうして2重次数つき代数として $E_2 \cong E_\infty$ である。

ステップ4 (拡張問題を解く): $\{E_r, d_r\}$ は $H^*(A, d)$ に収束するから E_∞ の計算から, ベクトル空間としての同型写像

$$\varphi: H^*(A, d) \xrightarrow{\cong} \text{Total}E_\infty = \frac{\mathbb{K}[\alpha] \otimes \wedge(\bar{\alpha})}{(\alpha\bar{\alpha}, \alpha^2)} \oplus \mathbb{K}\langle \bar{\alpha} \bar{\rho}^l \mid l \geq 1 \rangle \oplus K\langle \alpha \bar{\rho}^l \mid l \geq 1 \rangle$$

が存在することがわかる。

$d(\bar{\alpha} \bar{\rho}^l) = \bar{\alpha} \cdot l \cdot \bar{\rho}^{l-1} \cdot 2\alpha\bar{\alpha} = 0$ より $\bar{\alpha} \bar{\rho}^l$ は A のサイクルである。しかし A 上で

$$d(\alpha \bar{\rho}^l) = l \cdot 2\alpha \bar{\rho}^{l-1} \alpha \bar{\alpha} = 2l\alpha^2 \bar{\alpha} \bar{\rho}^{l-1} \neq 0$$

であるから $\alpha \bar{\rho}^l$ はサイクルではない。そこでこの元を代表する本当のサイクルを見つける。 $d(2l\rho\bar{\alpha} \bar{\rho}^{l-1}) = 2l\alpha^2 \bar{\alpha} \bar{\rho}^{l-1}$ より,

$$\alpha \bar{\rho}^l - 2l\rho\bar{\alpha} \bar{\rho}^{l-1}$$

は A 上のサイクルである。weight($\bar{\alpha}$) = 1 であるから, 項 $2l\rho\bar{\alpha} \bar{\rho}^{l-1}$ は $\alpha \bar{\rho}^l$ より下のフィルトレーションに入っていて E_∞ -項では見えていなかったことになる。

積についての拡張問題を全て解くと次のようになる。

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{2}\bar{\rho}\right) &= \alpha\bar{\alpha} \\ d(\rho) &= \alpha^2 \\ d(\rho\bar{\rho}^l) &= \alpha(\alpha\bar{\rho}^l - 2l\rho\bar{\alpha} \bar{\rho}^{l-1}) \\ d\left(\frac{1}{2(l+1)}\bar{\rho}^{l+1}\right) &= \bar{\rho}(\alpha\bar{\rho}^l - 2l\rho\bar{\alpha} \bar{\rho}^{l-1}) \\ d\left(\frac{1}{2(2l+1)}\bar{\rho}^{2l+1}\right) &= \bar{\alpha} \bar{\rho}^l (\alpha\bar{\rho}^l - 2l\rho\bar{\alpha} \bar{\rho}^{l-1}) \end{aligned}$$

これより自然に代数の準同型写像

$$\eta : \frac{\mathbb{K}[\alpha] \otimes \wedge(\bar{\alpha})}{(\alpha\bar{\alpha}, \alpha^2)} \oplus \mathbb{K}\langle \bar{\alpha} \bar{\rho}^l \mid l \geq 1 \rangle \oplus K\langle \alpha\bar{\rho}^l - 2l\rho\bar{\alpha} \bar{\rho}^{l-1} \mid l \geq 1 \rangle \rightarrow H(A, d)$$

が定義される。 $\varphi^{-1} \circ \eta$ はベクトル空間の同型射であるから、 η は代数の同型射となり $H(A, d)$ の生成元および代数構造が決定できた。

注意 3.2. 自由ループファイブレーション $\Omega S^{2m} \xrightarrow{i} LS^{2m} \rightarrow S^{2m}$ の Sullivan 模型 ([F-H-T, Proposition 15.5]) を考えると、 $H^*(\Omega S^{2m}; \mathbb{Q}) \cong \wedge(\alpha) \otimes \mathbb{Q}[\bar{\rho}]$ が示せ、さらに上の計算における $H^*(LS^{2m}; \mathbb{Q})$ の非分解元 $\bar{\alpha} \bar{\rho}^l$ は i^* で $H^*(\Omega S^{2m}; \mathbb{Q})$ の分解元 $\alpha \bar{\rho}^l$ に写されることがわかる。

例 3.3. 微分代数 (\mathcal{E}, D) 次で定義する。

$$\mathcal{E} := \wedge(\alpha, \rho, \bar{\alpha}, \bar{\rho}, u),$$

$$D(\bar{\rho}) = 2\alpha\bar{\alpha}, D(\alpha) = u\bar{\alpha}, D(\bar{\alpha}) = 0, D(\rho) = \alpha^2 - u\bar{\rho},$$

ただし $\deg u = 2$, $\deg \alpha = 2m$, $\deg \rho = 4m - 1$, $\deg \bar{\alpha} = 2m - 1$, $\deg \bar{\rho} = 4m - 2$ である。このとき (\mathcal{E}, D) は Borel 構成 $ES^1 \times_{S^1} LS^{2m}$ の Sullivan 模型である ([V-B])。ただし作用 $S^1 \times LS^{2m} \rightarrow LS^{2m}$ は $(t \cdot \gamma)(s) = \gamma(s + t)$ で定義されていることに注意する。

重みを $\text{weight}(\alpha) = \text{weight}(\rho) = \text{weight}(\bar{\rho}) = 0$, $\text{weight}(\bar{\alpha}) = 1$, $\text{weight}(u) = 2$ と定義して、上述のようなステップ 1 からステップ 4 を進めると、得られるスペクトル系列は E_4 -項で潰れて結果として代数の同型

$$H^*(ES^1 \times_{S^1} LS^{2m}; \mathbb{Q}) \cong H(\mathcal{E}, D) \cong \frac{\wedge(\bar{\alpha}, \bar{\alpha} \bar{\rho}, \bar{\alpha} \bar{\rho}^2, \dots) \otimes \mathbb{Q}[u]}{(\bar{\alpha} \bar{\rho}^m \cdot \bar{\alpha} \bar{\rho}^n, u \cdot \bar{\alpha}, u \cdot \bar{\alpha} \bar{\rho}^s)}$$

を得る。

REFERENCES

- [B-W] H. J. Baues and G. Wirsching, Cohomology of small categories, J. Pure Appl. Algebra 38 (1985), 187-211.
- [B-T] R. Bott and L. W. Tu, Differential forms in algebraic topology, Graduate Texts in Mathematics, 82. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [C-K] D. Chataur and K. Kuribayashi, An operadic model for a mapping space and its associated spectral sequence, J. Pure and Appl. Algebra 210 (2007), 321-342.
- [C-M] D. Chataur and L. Menichi, String topology of classifying spaces, J. Reine Angew. Math. 669 (2012), 1-45
- [C] A. Clark, Homotopy commutativity and the Moore spectral sequence, Pacific J. Math. 15 (1965), 65-74.
- [C-J-Y] R. L. Cohen, J. D. S. Jones and J. Yan, The loop homology algebra of spheres and projective spaces, Categorical decomposition techniques in algebraic topology (Isle of Skye, 2001), 77-92, Progr. Math., 215, Birkhäuser, Basel, 2004.
- [C-S] M. C. Crabb and W. A. Sutherland, Counting homotopy types of gauge groups, Proc. London Math. Soc. (3) 81 (2000), 747-768.
- [E-M] S. Eilenberg and J. C. Moore, Homology and fibrations. I. Coalgebras, cotensor product and its derived functors, Comment. Math. Helv. 40 (1966), 199-236.
- [F-H-T] Y. Félix, S. Halperin and J. -C. Thomas Rational Homotopy Theory, Graduate Texts in Mathematics **205**, Springer-Verlag.
- [F-T] Y. Félix and J. -C. Thomas, String topology on Gorenstein spaces, Math. Ann. **345**(2009), 417-452.
- [Go] D. H. Gottlieb, Fiber bundles with cross-sections and noncollapsing spectral sequences, Illinois J. Math. 21 (1977), no. 1, 176-177.
- [G-M] V. K. A. M. Gugenheim and J. P. May, On the theory and applications of differential torsion products, Memoirs of AMS, (1974), no. 142.
- [Ko-Ki] A. Kono and D. Kishimoto, On the cohomology of free and twisted loop spaces, J. Pure Appl. Algebra 214 (2010), 646-653.
- [Ko-Ko] A. Kono and K. Kozima, The mod 2 homology of the space of loops on the exceptional Lie group, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 112 (1989), 187-202.
- [K-K] A. Kono and K. Kuribayashi, Module derivations and cohomological splitting of adjoint bundles, Fund. Math. 180 (2003), 199-221.
- [K-M-S] A. Kono, M. Mimura and N. Shimada, On the cohomology mod 2 of the classifying space of the 1 connected exceptional Lie group E_7 , J. Pure Appl. Algebra 8 (1976), 267-283.
- [K1] K. Kuribayashi, On the mod p cohomology of the spaces of free loops on the Grassmann and Stiefel manifolds, J. Math. Soc. Japan 43 (1991), 331-346.

- [K2] K. Kuribayashi, The extension problem and the mod 2 cohomology of the space of free loops on $\text{Spin}(N)$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 121A (1992), 91-99.
- [K3] K. Kuribayashi, The cohomology ring of the space of loops on Lie groups and homogeneous spaces, Pacific J. Math. 163 (1994), 361-391.
- [K4] K. Kuribayashi, On the Betti number of the space of invariant paths on the space whose cohomology is the exterior algebra with two generators, Topology Appl., 125 (2002), 161-170.
- [K5] K. Kuribayashi, Eilenberg-Moore spectral sequence calculation of function space cohomology, manuscripta math. 114 (2004), 305-325.
- [K6] K. Kuribayashi, The Hochschild cohomology ring of the singular cochain algebra of a space, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 61 (2011), 1779-1805. arXiv:math.AT/1006.0884.
- [K-Me-N] K. Kuribayashi, L. Menichi and T. Naito, Derived string topology and the Eilenberg-Moore spectral sequence, arXiv:1211.6833 (2012).
- [K-M-N] K. Kuribayashi, M. Mimura and T. Nishimoto, Twisted tensor products related to the cohomology of the classifying spaces of loop groups, Memoirs of AMS, 180 (2006), no. 849.
- [K-S] 栗林 勝彦 (述), 境 圭一 (記), 微分捩れ積, 加群微分子, Sullivan 模型による写像空間のホモトピー論, (東京大学数理学部レクチャーノート; 9) 2010.
- [K-Y] K. Kuribayashi and T. Yamaguchi, The cohomology algebra of certain free loop spaces, Fund. Math. 154 (1997), 57-73.
- [Man] M. Mandell, E_∞ algebras and p -adic homotopy theory. Topology 40 (2001), 43-94.
- [Mi] J. Milnor, Construction of universal bundles. I, Ann. of Math. (2) 63 (1956), 272-284.
- [M-M] J. W. Milnor and J. C. Moore, On the structure of Hopf algebras, Ann. of Math. (2) 81 1965 211-264.
- [May] J. P. May, Classifying spaces and fibrations, Mem. Amer. Math. Soc. 155, 1975.
- [M] 百瀬 康弘 小圏の表現論と Baues-Wirsching コホモロジーについて, 信州大学工学系研究科, 修士論文 2013.
- [Mori] M. Mori, The Steenrod operations in the Eilenberg-Moore spectral sequence, Hiroshima Math. J. 9 (1979), 17-34.
- [N-T] B. Ndongol and J. -C. Thomas, On the cohomology algebra of free loop spaces, Topology 41 (2002), 85-106.
- [R] D. L. Rector, Steenrod operations in the Eilenberg-Moore spectral sequence, Comment. Math. Helv. 45 (1970), 540-552.
- [S] L. Schwartz, Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 1994.
- [Smith1] L. Smith, Homological algebra and the Eilenberg-Moore spectral sequence, Trans. Amer. Math. Soc. 129 (1967), 58-93.
- [Smith2] L. Smith, The cohomology of stable two stage Postnikov systems, Illinois J. Math. 11 (1967), 310-329.
- [Smith3] L. Smith, On the Künneth theorem. I. The Eilenberg-Moore spectral sequence, Math. Z. 116 (1970), 94-140.
- [Smith4] L. Smith, On the characteristic zero cohomology of the free loop space, Amer. J. Math. 103 (1981), no. 5, 887-910.
- [Smith5] L. Smith, The Eilenberg-Moore spectral sequence and the mod 2 cohomology of certain free loop spaces, Illinois J. Math. 28 (1984), 516-522.
- [Si] W. M. Singer, Steenrod squares in spectral sequences, Mathematical Surveys and Monographs, 129. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [M-M1] 戸田 宏, 三村 護 リー群の位相〈上〉線型代数から KO-群の周期性へ, 紀伊国屋数学叢書, 1978.
- [M-M2] 戸田 宏, 三村 護 リー群の位相〈下〉コンパクトリー群の理論から例外群へ, 紀伊国屋数学叢書, 1979.
- [V-B] M. Vigué-Poirrier and D. Burghelea, A model for cyclic homology and algebraic K-theory of 1-connected topological spaces, J. Differential Geom. 22 (1985), 243-253.