

アソシエーションスキームの圏論的一般化について — スキーモイドとその圏 —

栗林 勝彦 (信州大学)
2013年6月25日

1. はじめに

本報告集の内容は第30回代数的組合せ論シンポジウムにおける講演内容とプレプリント [8] の内容に基づいている。特に本稿は [8] で導入した (擬) スキーモイドとそれらがつくる圏の解説とその基本性質の概説を目的とする*¹。現状を概観する場面や展望, 希望を語る場面では些か「押しつけ」の感が強い。著者が夢を語っている箇所とご理解頂きお許し願いたい。

有限群は群環を経由することで圏論的表現論の道具を用いて有限次元代数の表現論と共通の枠組みで研究が進められている。また分類空間を経由して位相空間の圏上でホモトピー論を用いてその性質が解明されてきた。代数的組合せ論における重要な研究対象であるアソシエーションスキームは有限群の一般化とも考えられる。したがって, それらの特性の解明や, 分類は私たちの興味をそそる非常に重要な問題である。アソシエーションスキームの研究をさらに進めるためには, 有限群の研究の歴史が示すように圏論的枠組みを構築しその研究に必要な道具を整備すること, また分類問題を考察するために適切な不変量を定義することが重要であろう。

一方で小圏のホモトピー論はある意味, 位相空間のホモトピー論と等価である。より正確には小圏の圏と位相空間のつくる圏には Quillen の意味のモデル圏構造が定まり, それらのホモトピー圏は互いに同値になる ([9])。よってトポロジー研究に現れる多くの対象 (CW 複体, シンプレクテック多様体や Lie 群など) はホモトピー論的には小圏に適切な条件を付加して記述できるものと等価であると言って良い。しかしながら, 小圏には「顔」がない。半順序集合 (posets) や亜群等のホモトピー論, 圏論的研究はあるものの, どのような小圏が特別なのかという議論は多くはない。小圏にある特別な性質「顔」を持たせ議論することそして上記のようなアソシエーションスキームの圏論的枠組の構築を目的として本研究プロジェクトは始まった。このような試みの一部を本稿で概説する。

第2章ではアソシエーションスキームを一般化した**スキーモイド**の概念を導入しそれらがつくる圏を定義する。スキーモイドとは小圏の射全体がつくる集合に適切な分割を与える (色分けを行なう) ことで構成されるもので, それらがつくる圏には Hanaki によるアソシエーションスキームの圏や French により導入された圏が埋め込まれる。さらにアソシエーションスキームに Bose-Mesner 代数が同伴するように, スキーモイドに対しても自然に代数が付随して現れる。この代数がスキーモイドに対する基礎圏の圏代数の部分代数として現れることは, 圏論的表現論の道具を用いてスキーモイドが考察できることを示唆している。

第3章では French により導入されたアソシエーションスキームの間の許容写像をスキーモイドの場合に一般化し, その基本性質を述べる。第4章ではスキーモイドの拡張やそれらの分類を Baues-Wirsching の小圏の拡張理論を用いて展開する。第5章ではアソシエーションスキームを完全グラフと考えることで, 小圏とみなしそこからスキーモイドを構成する方法を述べる。今後の展望は第6章で述べられる。

[8] ではさらに thin スキームに対応する thin スキーモイドの概念とそれらがつくるスキーモイドの適切な部分圏と亜群がつくる圏との同値性が述べられている。これらも重要な結果ではあるが, 本稿ではその説明は割愛した。

2. (擬) スキーモイドとスキーモイドの圏

私たちが導入するスキーモイドとの比較のために, まずアソシエーションスキームの定義を思い出す。

*¹述べられる定理, 命題等の証明はすべて省略します。[8] を参照してください。

有限集合 X と直積集合 $X \times X$ の分割 S , すなわち巾集合 $2^{X \times X}$ の部分集合であり $X \times X = \coprod_{\sigma \in S} \sigma$ をみたすものを考える。また $g \in S$ に対して

$$g^* := \{(y, x) \mid (x, y) \in g\}$$

とおき, 対角写像 $\{(x, x) \mid x \in X\}$ を 1_X で表す。分割 S が次の 3 条件をみたすとき組 (X, S) を **アソシエーションスキーム** (AS と以下略記) という。

- (1) $1_X \in S$,
- (2) $g \in S$ に対して $g^* \in S$,
- (3) 任意の $e, f, g \in S$ に対して非負の整数 p_{ef}^g が定まり, 任意の $(x, z) \in g$ に対して

$$p_{ef}^g = \#\{y \in X \mid (x, y) \in e \text{ かつ } (y, z) \in f\}.$$

ここで p_{ef}^g は元 $(x, z) \in g$ の取り方に無関係に定まる非負整数であることに注意する。

例えば, 有限群 G を考えるとき $[G] := \{G_h\}$, $G_h := \{(k, l) \in G \times G \mid k^{-1}l = h\}$ と定義すると $(G, [G])$ は $p_{G_f G_g}^{G_{fg}} = 1$, $h \neq fg$ のとき $p_{G_f G_g}^{G_h} = 0$ となり AS となる。

上記 (3) の条件を圏論的な条件に書き換えることで, 擬スキーマイドが定義される。以後, 圏 \mathcal{C} の射 $u : x \rightarrow y$ に対して $x = s(u)$, $y = t(u)$ と表す場合がある。

定義 2.1. \mathcal{C} を小圏, すなわち \mathcal{C} の対象全体がつくる類が集合であるとする。 $S := \{\sigma_l\}_{l \in I}$ を \mathcal{C} の射全体がつくる集合 $\text{mor}(\mathcal{C})$ の分割であるとする。次の条件をみたすとき, 圏 \mathcal{C} と分割の対 (\mathcal{C}, S) を **擬スキーマイド** (quasi-schemoid) と呼ぶ。 (\mathcal{C} はこの擬スキーマイドの基礎圏とよばれる。)

任意の $\sigma, \tau, \mu \in S$ と μ の任意の射 f, g に対して, 集合としての同型

$$(\pi_{\sigma\tau}^\mu)^{-1}(f) \cong (\pi_{\sigma\tau}^\mu)^{-1}(g),$$

が成り立つ。ただし, $\pi_{\sigma\tau}^\mu : \pi_{\sigma\tau}^{-1}(\mu) \rightarrow \mu$ は結合写像

$$\pi_{\sigma\tau} : \sigma \times_{\text{ob}(\mathcal{C})} \tau := \{(u, v) \in \sigma \times \tau \mid s(u) = t(v)\} \rightarrow \text{mor}(\mathcal{C})$$

を制限して定義される写像を表している。以下 $(\pi_{\sigma\tau}^\mu)^{-1}(f)$ の濃度を $p_{\sigma\tau}^\mu$ と表す。

小圏を対象とし小圏の間の関手を射として得られる圏を Cat , その充満部分圏である亜群 (groupoid) ^{*2} の圏を Gpd と表す。

例 2.2. (i) (離散的スキーマイド) \mathcal{C} を小圏とし $\text{mor}(\mathcal{C})$ の分割 S を $S = \{\{f\}\}_{f \in \text{mor}(\mathcal{C})}$ で与えるとき, 対 $K(\mathcal{C}) := (\mathcal{C}, S)$ は擬スキーマイドとなる。こうして小圏から自然に擬スキーマイドが得られる。

(ii) (シューアスキーマイド) G を (有限とは限らない) 群とする。 G を一つの対象 \bullet のみを持ち, 射の集合が G である亜群と考える。 G -圏 \mathcal{D} , すなわち関手 $F : G \rightarrow \text{Cat}$ が存在して $\mathcal{D} = F(\bullet)$ となる圏 \mathcal{D} を考える。このとき集合 $\text{mor}(\mathcal{D})$ の G による軌道全体がつくる集合を S とするとき, (\mathcal{D}, S) は擬スキーマイドとなる。実際これはシューアの AS が (3) の条件をみたすことを確かめる場合と同じように示せる。

例えば, \mathcal{D} が次の図式で与えられる小圏であり, $\mathbb{Z}/2$ は a を b に $1_x, 1_y$ は変えずに \mathcal{D} に作用しているとする。

$$1_x \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \circlearrowleft \end{array} x \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xleftarrow{b} \end{array} y \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \circlearrowleft \end{array} 1_y \quad \quad \quad \circlearrowright \mathbb{Z}/2$$

このとき擬スキーマイド $(\mathcal{C}, \{\{1_x, 1_y\}, \{a, b\}\})$ を得る。

擬スキーマイドに AS の定義の条件 (1) と (2) を一般化したものを付加してスキーマイドを定義する。

^{*2}全ての射が可逆である小圏

定義 2.3. 擬スキーマイド (\mathcal{C}, S) が次の 2 条件をみたすとき **アソシエーションスキーマイド** (スキーマイド (schemoid)) という*³。

- (i) 任意の $\sigma \in S$ と集合 $J := \coprod_{x \in \text{ob}(\mathcal{C})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ に対して, もし $\sigma \cap J \neq \emptyset$ ならば $\sigma \subset J$.
- (ii) 反変関手 $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ で $T^2 = \text{id}_{\mathcal{C}}$ をみたすものが存在する。さらに任意の $\sigma \in S$ に対して

$$\sigma^* := \{T(f) \mid f \in \sigma\}$$

は S に属する。反変関手 T を持つこのスキーマイドを (\mathcal{C}, S, T) と表す。

例 2.4. (i)(AS からの構成) アソシエーションスキーマ (X, S) を考える。このとき小圏 \mathcal{C} を $\text{ob}(\mathcal{C}) = X$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x) = \{(x, y)\} \subset X \times X$, 合成を $(z, x) \circ (x, y) = (z, y)$ と定義する。このとき $U = S$, 反変関手 $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ を $T(x) = x$, $T(x, y) = (y, x)$ で定義すると, $j(X, S) := (\mathcal{C}, U, T)$ はスキーマイドとなる。

(ii)(亜群からの構成) \mathcal{H} を亜群とする。小圏 $\tilde{\mathcal{H}}$ を $\text{ob}(\tilde{\mathcal{H}}) := \text{mor}(\mathcal{H})$, そして射に関しては

$$\text{Hom}_{\tilde{\mathcal{H}}}(g, h) = \begin{cases} \{(h, g)\} & \text{if } t(h) = t(g) \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定義する。さらに $\text{mor}(\tilde{\mathcal{H}})$ の分割 $S = \{\mathcal{G}_f\}_{f \in \text{mor}(\mathcal{H})}$ を $\mathcal{G}_f = \{(k, l) \mid k^{-1}l = f\}$, 反変関手を $(f, g) \in \text{mor}(\tilde{\mathcal{H}})$ に対して $T((f, g)) = (g, f)$ と定義する。このとき $\tilde{S}(\mathcal{H}) := (\tilde{\mathcal{H}}, S, T)$ はスキーマイドとなる。これは群 G から得られるアソシエーションスキーマ $S(G)$ の場合と同様に確かめられる。

さらに体系的な (擬) スキーマイドの構成方については第 5 章で述べる。ここでは次にアドホックな方法で得られるスキーマイドの例をあげる。

例 2.5. G を群とし, \mathcal{C} を次の図式で与えられる小圏とする。

$$G \curvearrowright x \xrightarrow{f} y \curvearrowleft G^{\text{op}}$$

すなわち, $\text{ob}(\mathcal{C}) = \{x, y\}$ であり, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) = G$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, y) = G^{\text{op}}$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \{f\}$ になる。このとき (\mathcal{C}, S, T) はスキーマイドである。ただし, $\text{mor}(\mathcal{C})$ の分割は $S = \{S_g\}_{g \in G} \cup \{S_f\}$, $S_g := \{g, g^{\text{op}}\}$, $S_f := \{f\}$, 反変関手は $T(x) := y$, $T(y) := x$ で定義されている。

例 2.6. 次で定義される 3 系 $(\mathcal{D}, \{S^i\}_{0 \leq i \leq 3}, T)$ はスキーマイドとなる。ここで基礎圏 \mathcal{D} は図式

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ \alpha \nearrow & & \searrow \beta \\ x & \xrightarrow{\varepsilon} & y \\ \gamma \searrow & & \nearrow \delta \\ & b & \end{array} \quad ; \quad \beta\alpha = \varepsilon = \delta\gamma;$$

で定義される。さらに $\text{mor}(\mathcal{D})$ の分割と \mathcal{D} 上の反変関手 $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ はそれぞれ $S = \{S^i\}_{i=0,1,2,3}$, $S^1 = \{\alpha, \gamma\}$, $S^2 = \{\beta, \delta\}$, $S^3 = \{\varepsilon\}$, $S^0 = \{1_x, 1_y, 1_a, 1_b\}$ そして $T(a) = b$, $T(\varepsilon) = \varepsilon$, $T(\alpha) = \delta$, $T(\beta) = \gamma$ で定義されている。

アソシエーションスキーマ (X, S) に Bose-Mesner 代数 $\mathcal{A}(X, S)$ が付随して現れた様に, 擬スキーマイドからも自然に代数が定義できる。まず圏代数を思い出そう。 \mathcal{C} を小圏とし, \mathbb{K} を単位元を持つ可換環とする。このとき **圏代数** (category algebra) とは自由 \mathbb{K} -加群 $\mathbb{K}\mathcal{C} := \mathbb{K}\langle f \mid f \in \text{mor}(\mathcal{C}) \rangle$ であり

$$\alpha\beta = \begin{cases} \alpha \circ \beta & s(\alpha) = t(\beta) \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

*³この定義からスキーマイドは実際, coherent configuration の一般化になっていることがわかる。

により定義される積をもつ \mathbb{K} -代数である。圏代数は一般的には非可換であり単位元を持たない。 \mathcal{C} を基礎圏として持つ擬スキーマイド (\mathcal{C}, S) が与えられたとする。分割 S の元はすべて有限集合であると仮定する。このとき任意の S の元 σ, τ に対して圏代数 $\mathbb{K}\mathcal{C}$ 上で

$$\left(\sum_{s \in \sigma} s\right) \cdot \left(\sum_{t \in \tau} t\right) = \sum_{\mu \in S} p_{\sigma\tau}^{\mu} \left(\sum_{u \in \mu} u\right)$$

が成立する。すなわち自由 \mathbb{K} -加群

$$\mathbb{K}(\mathcal{C}, S) := \mathbb{K}\langle \sum_{s \in \sigma} s \mid \sigma \in S \rangle$$

は圏代数 $\mathbb{K}\mathcal{C}$ 部分代数となる。そこで $\mathbb{K}(\mathcal{C}, S)$ を擬スキーマイド (\mathcal{C}, S) の **Bose-Mesner 代数** とよぶ。この代数が単位元を持つときはどのような場合かが直ぐわかる。

圏 \mathcal{C} に対して, $\text{mor}(\mathcal{C})$ 部分集合 J_0 を

$$J_0 := \{1_x \mid x \in \text{ob}(\mathcal{C})\}$$

と定義する。(擬)スキーマイド (\mathcal{C}, S) に対して, $\alpha \in S$ かつ $\alpha \cap J_0 \neq \emptyset$ ならば $\alpha \subset J_0$ をみたすとき, (\mathcal{C}, S) は **単位的** (unital) であるという。

補題 2.7. [8, Lemma 2.4] (\mathcal{C}, S) を擬スキーマイド, その基礎圏 \mathcal{C} は有限とする。このとき Bose-Mesner 代数 $\mathbb{K}(\mathcal{C}, S)$ が単位元を持つための必要十分条件は (\mathcal{C}, S) が単位的であることである。

Hanaki が定義したの AS の圏 AS([4 参照]) の定義を自然に拡張して (擬)スキーマイドの圏を定義する。

定義 2.8. (i) (\mathcal{C}, S) と (\mathcal{E}, S') を擬スキーマイドとする。このとき関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ が任意の $\sigma \in S$ に対して $\tau \in S'$ が存在して $F(\sigma) \subset \tau$ をみたすとき F を擬スキーマイドの射といい $F: (\mathcal{C}, S) \rightarrow (\mathcal{E}, S')$ と表す。

(ii) (\mathcal{C}, S, T) と (\mathcal{E}, S', T') をスキーマイド, $F: (\mathcal{C}, S) \rightarrow (\mathcal{E}, S')$ を擬スキーマイドの射とする。 $FT = T'F$ をみたすとき $F: (\mathcal{C}, S, T) \rightarrow (\mathcal{E}, S', T')$ と表して, F をスキーマイドの射と呼ぶ。

記号の乱用はあるが, F が擬スキーマイドの射であり $F(\sigma) \subset \tau$ をみたしているとき, F を分割の間の写像と考えて $F(\sigma) = \tau$ と表示する。

擬スキーマイドの圏, スキーマイドの圏を以下それぞれ $q\text{ASmd}$, ASmd と表す。

例 2.2(i), 2.4 で与えた対象間の対応は圏の間の関手を生み出す。こうして次の可換図式を得る。

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Gpd} & \xrightarrow{\tilde{S}(\cdot)} & \text{ASmd} & \xrightarrow{k} & q\text{ASmd} & \xrightleftharpoons[K]{U} & \text{Cat}. \\ & & \uparrow j & & & & \\ & & \text{Gr} & \xrightarrow{S(\cdot)} & \text{AS} & & \end{array}$$

ただし U は基礎圏を取り出す忘却関手, k は自然な忘却関手そして Gr は有限群の圏を表す。 $S(\cdot)$ は関手 i, j および K は充満忠実埋め込みである。ここで合成 $Uk\tilde{S}(\cdot)$ が自然な埋め込み $\text{Gpd} \rightarrow \text{Cat}$ には なっていない ということに注意する。

定理 2.9. [8, Theorem 3.2] (i) 関手 $S(\cdot)$ は $\tilde{S}(\cdot)$ は忠実である。

(ii) 関手 i, j および K は充満忠実埋め込みである。

この定理によりスキーマイドは AS の一般化であることが分り, さらに擬スキーマイドが小圏の拡張であることがわかる。後ほど概説されるように, 関手 $\tilde{S}(\cdot)$ により表されるスキーマイドは thin スキーマイドとして特徴づけられる。したがってスキーマイドは亜群の一般化でもある。

3. 許容写像と基礎的スキーマイド

残念ながら Bose-Mesner 代数を与える対象の間の対応

$$\mathcal{A}(\) : \text{AS} \rightsquigarrow \text{Alg}$$

は一般に関手を与えない。そこで, French[3] は AS の射を”許容写像”^{*4}に制限することで圏 \mathcal{S} を導入し, 次を示した。

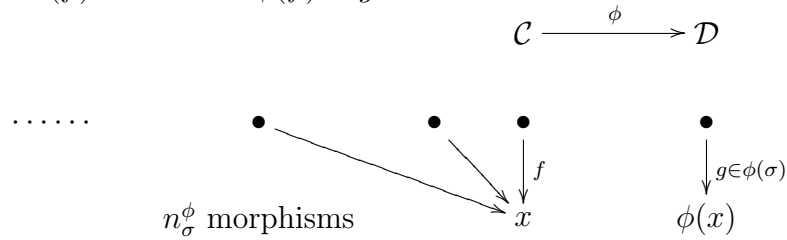
定理 3.1. [3, Corollaries 6.4, 6.6] 対象の間の対応 $\mathcal{A}(\) : \mathcal{S} \rightarrow \text{Alg}$ は自然に関手を引き起こす。

許容写像の定義を圏論的に書き換えて一般化することで, 定理 3.1 は擬スキーマイドの世界で一般化されることになる。その一般化のために圏 \mathcal{S} を拡大する。

定義 3.2. 擬スキーマイド $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ が基本的であるとは以下の (i), (ii) をみたすことである。

- (i) $\alpha \in \mathcal{S}$ に対して $\alpha \cap J_0 \neq \emptyset$ ならば $\alpha \subset J_0$, ただし $J_0 := \{1_x \mid x \in \text{ob}(\mathcal{C})\}$ である。
- (ii) 基礎圏 \mathcal{C} は亜群である。

定義 3.3. 擬スキーマイドの射 $\phi : (\mathcal{C}, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathcal{D}, \mathcal{T})$ は次をみたすとき許容的 (admissible) と呼ばれる。任意の $x \in \text{ob}(\mathcal{C})$, $\sigma \in \mathcal{S}$ そして $t(g) = \phi(x)$ をみたす $g \in \phi(\sigma)$ に対して, $f \in \sigma$ が存在して $t(f) = x$ および $\phi(f) = g$ となる。



注意 3.4. 定義 3.3 において, $(\mathcal{D}, \mathcal{T})$ は基本的であり, $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ が有限な擬スキーマイドで基礎圏が亜群である場合 f の個数は有限でその値は ϕ と σ のみにより決まり x, g の取り方にはよらない ([8, Lemma 6.5] 参照)。その数を以下 n_σ^ϕ と表す。

有限な基本的擬スキーマイドと許容的射がつくる圏を \mathcal{B} と表す。

ここで, 第2章で導入した擬スキーマイドにその Bose-Mesner 代数を定める対応 $\mathbb{K}(\)$ を思い出す。French の結果をスキーマイドの言葉で述べると以下のようなになる。

命題 3.5. [8, Proposition 6.7] $(\mathcal{D}, \mathcal{T})$ を有限な基本的擬スキーマイド, $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ は有限な擬スキーマイドであり基礎圏 \mathcal{C} は亜群であるとする。さらに $\phi : (\mathcal{C}, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathcal{D}, \mathcal{T})$ を許容的写像とする。このとき $\mathbb{K}(\phi)(s_\sigma) = n_\sigma^\phi s_{\phi(\sigma)}$ で定義される写像 $\mathbb{K}(\phi) : \mathbb{K}(\mathcal{C}, \mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{K}(\mathcal{D}, \mathcal{T})$ は代数の準同型写像となる, ただし $s_\sigma = \sum_{p \in \sigma} p$ である。

こうして定理 3.1 の一般化が得られる。

定理 3.6. [8, Theorem 6.9] 命題 3.5 で与えられる対応 $\mathbb{K}(\) : \mathcal{B} \rightarrow \text{Alg}$ は関手を誘導する。

さらに充満忠実関手 $j : \text{AS} \rightarrow \text{ASmd}$ は $j_S : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{B}$ に制限されやはり充満忠実となる。

基点付き thin スキーマイドおよびその圏 $t(\text{ASmd})_0$ も定義でき^{*5}, この圏は関手 $\tilde{S}(\)$ により亜群の圏 Gpd と同値になることがわかる ([8, Theorem 4.11])。

^{*4}擬スキーマイドの場合に拡張した定義を以下に述べるため AS の場合の定義は省略する。

^{*5}詳細は [8, Section 4] 参照。

既知の事実及び今まで述べた圏と関手についてまとめると次の図式を得る。

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccccccc} \text{Gpd} & \xleftarrow{\tilde{R}} & (t\text{ASmd})_0 & \longrightarrow & \text{ASmd} & \xrightarrow{k} & q\text{ASmd} & \xrightarrow{U} & \text{Cat} & \xrightarrow{N(\cdot)} & \text{Set}^{\Delta^{op}} & \xleftarrow{S_*(\cdot)} & \text{Top} \\ i' \uparrow & \xrightarrow{\tilde{S}(\cdot)} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow K & \xleftarrow{c} & & \downarrow || & \\ \text{Gpd}' & \longrightarrow & \mathcal{B} & & \mathcal{B} & & \mathcal{B} & & & & & & \\ i \uparrow & & \uparrow j_{(t\text{AS})_0} & & \uparrow j & & \uparrow \mathbb{K}(\cdot) & & & & & & \\ \text{Gr} & \xrightarrow{S(\cdot)} & (t\text{AS})_0 & \longrightarrow & \text{AS} & \xrightarrow{\mathbb{A}(\cdot)} & \text{Alg} & & & & & & \\ \simeq & & \uparrow j_S & & \uparrow \mathbb{A}(\cdot) & & \uparrow \mathbb{A}(\cdot) & & & & & & \\ & & \downarrow S(\cdot) & & \downarrow \mathbb{A}(\cdot) & & \downarrow \mathbb{A}(\cdot) & & & & & & \end{array}$$

ただし波矢印は関手ではなく単に対象上の対応である。また K と垂直方向の矢印 $j, j_S, j_{(t\text{AS})_0}$ は充満忠実関手 (fully faithful functor) である。定理 2.9 を参照。射 $N(\cdot)$ と c は、それぞれナーブ構成関手と圏化関手 ([6]) を意味している。さらに $||, S_*(\cdot)$ は実現関手、特異単体集合を与える関手である。平行ライン上に表されている関手は、下の射が上の射の左随伴であることに注意する。狭義には関手 $\tilde{S}(\cdot) : \text{Gpd}' \rightarrow \mathcal{B}$ と $q\text{ASmd}$ から Alg への対応 $\mathbb{K}(\cdot)$ はそれぞれ有限亜群の圏と有限擬スキームの圏に制限されるべきである。ここで、 Gpd' は対象上で単射となる射に制限してえられる、 Gpd の部分圏である。

(3.1) の右上段に位置する 3 つの圏 $\text{Cat}, \text{Set}^{\Delta^{op}}$ (単体的集合の圏) そして Top (位相空間の圏) を考える。Thomason ([9]) の結果から それらのホモトピー圏は上の図式上に置かれている関手 $N(\cdot), S_*(\cdot)$ により同値になる。関手 K は充満忠実であるからある意味、擬スキーム “位相空間の一般化” とも言えよう。従って第 6 章でも繰り返し言及されることであるが、 $q\text{ASmd}$ におけるホモトピー論を展開することは重要な意味を持つ。

Zieschang [13], Hanaki [4] により有限群の圏 Gr と基点付きの thin AS がつくる AS の部分圏 $(t\text{AS})_0$ とは圏として同値となる (図式左下) ことが示されている。先に述べたように、この事実は拡張されて、(3.1) 上段の同値を与える。

4. スキームの拡張と許容写像

(擬) スキームを系統的に作り出すことは圏 $\text{ASmd}, q\text{ASmd}$ を豊かにすることになり特に重要である。ここでは Baues-Wrisching の圏の線形拡張を利用して (擬) スキームを拡大していくことを考える。

$F(\mathcal{C})$ を \mathcal{C} の分解圏とする、すなわち $ob(F(\mathcal{C})) = mor(\mathcal{C})$, 射 $(\alpha, \beta) : f \rightarrow g$ は $mor(\mathcal{C})$ の対であり、図式

$$\begin{array}{ccc} t(f) & \xrightarrow{\alpha} & t(g) \\ f \uparrow & & \uparrow g \\ s(f) & \xleftarrow{\beta} & s(g) \end{array}$$

を可換にするものである。 $F(\mathcal{C})$ 上の射の合成は $(\alpha', \beta') \circ (\alpha, \beta) = (\alpha'\alpha, \beta\beta')$ で定義される。

定義 4.1. ([1, (2.2) Definition]) \mathcal{C} と \mathcal{E} を小圏とする。さらに $D : F(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{K}\text{-Mod}$ を自然系 (natural system), すなわち、 $F(\mathcal{C})$ から \mathbb{K} -加群の圏 $\mathbb{K}\text{-Mod}$ への関手とする。このとき次の (a), (b), (c) が成り立つとき

$$D_+ \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{q} \mathcal{C}$$

を自然系 D による \mathcal{C} の線形拡張 (linear extension) という。

(a) \mathcal{E} と \mathcal{C} の対象の集合は同じで q は対象の上では恒等的な充満関手。

(b) \mathcal{C} 上の任意の射 $f : A \rightarrow B$ に対して、アーベル群 D_f は推移的かつ効果的に $mor(\mathcal{E})$ の部分集合 $q^{-1}(f)$ に作用する。 $\alpha \in D_f$ の $f_0 \in q^{-1}(f)$ 上の作用を $f_0 + \alpha$ と表す。

(c) (b) の作用は線形分配法則 (linear distributivity law):

$$(f_0 + \alpha)(g_0 + \beta) = f_0 g_0 + f_* \beta + g^* \alpha,$$

をみたま、ただし $f_* = D(f, 1)$, $g^* = D(1, g)$ である。

命題 4.2. [8, Proposition 5.2] 小圏 \mathcal{C} 上の線形拡張 $D_+ \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{q} \mathcal{C}$ を考える。 (\mathcal{C}, S) を擬スキーマイドとする。さらに任意の射 $f \in \text{mor}(\mathcal{C})$ に対して準同型写像 f^* と f_* は同型写像となり任意の $\sigma \in S$, $f, g \in \sigma$ に対して $D_{1_{s(f)}} \cong D_{1_{s(g)}}$ が成り立つとする。このとき \mathcal{E} には q が $\text{mor}(\mathcal{E})$ の分割上では単射かつスキーマイドの間の射となるような擬スキーマイド構造が一意に定まる。

命題 4.2 でいう線形拡張を**スキーマイド拡張**そしてその射影 q を以下、**固有射** (proper morphism) とよぶ。

注意 4.3. 底小圏 \mathcal{C} にスキーマイドの構造が入るある特別な場合には、 \mathcal{E} にもスキーマイド構造が定義できる ([8, Theorem 5.5] 参照)。

任意の \mathbb{Z} -加群 M に対して、自然系 $\underline{M} : F(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ (自明表現) を $x \in \text{ob}(\mathcal{C})$ と $f \in \text{mor}(\mathcal{C})$ に対して $\underline{M}(x) = M$, $\underline{M}(f) = \text{id}_M$ 定義する。このとき Baues-Wirsching コホモロジー $H_{BW}^*(\mathcal{C}, D)$ が次で定義される。

$$H_{BW}^*(\mathcal{C}, D) := \text{Ext}_{\mathbf{Func}(F(\mathcal{C}), \mathbb{Z}\text{-Mod})}^*(\mathbb{Z}, D).$$

本来 Baues-Wirsching コホモロジーは適切なチェイン複体により定義されていることに注意する ([1, (1.4) Definition] 参照)。

Baues-Wirsching による結果 [1, (2.3) Theorem] は 2 次 Baues-Wirsching コホモロジーが小圏上の線形拡張を分類するということを主張している。したがって、命題 4.2 から次の結果を得る。

定理 4.4. [8, Theorem 5.7] (\mathcal{C}, S) を擬スキーマイド、 $D : F(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ を自然系で、 $f \in \text{mor}(\mathcal{C})$ に対して f_* , f^* は同型写像、さらに $\sigma \in S$, $f, g \in \sigma$ に対して、 $D_{1_{s(f)}} \cong D_{1_{s(g)}}$ が成り立つとする。このとき Baues-Wirsching コホモロジー $H_{BW}^2(\mathcal{C}; D)$ は射影 q が固有射であるスキーマイド拡張 $D_+ \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{q} \mathcal{C}$ を分類する。

系 4.5. [8, Corollary 5.8] (X, S) をアソシエーションスキームとする。スキーマイド $j(X, S)$ 上のすべてのスキーマイド拡張は分裂する。

$j(X, S)$ は圏としては完全グラフから得られる圏となるため、自明な圏と同値となる。したがって任意の自然系 D に対して $H_{BW}^*(j(X, S), D) = 0$ ($* > 0$)。これより上の系が従う。

ある条件下で、スキーマイド拡張の固有射は前章で導入した許容写像になる。さらにその固有射は Bose-Mesner 代数上に同型写像を誘導することがわかる ([8, Propositions 6.6, 6.11, Corollary 6.13] 参照)。これらの事実から基礎圏が圏としては同型ではないが、それぞれの Bose-Mesner 代数は同型であるスキーマイドを得ることができる。

例 4.6. [8, Remark 6.14] まず、一般に群 G に対して $G^\bullet := (G, \{G\}, T)$ はスキーマイドであることに注意する、ただし反変関手 T は $T(g) = g^{-1}$ で与えられる。

(X, S) をアソシエーションスキームとし、 \mathcal{E}_0 と \mathcal{E}_1 をそれぞれ積スキーマイド^{*6} $j(X, S) \times (\mathbb{Z}/2)^\bullet$ 上の自明表現 $\mathbb{Z}/2$ による自明なスキーマイド拡張と非自明なものとする^{*7}。このとき $\text{ch}(\mathbb{K}) \neq 2$ ならば、代数として

$$\mathbb{K}(\mathcal{E}_1) \cong \mathbb{K}(\mathcal{E}_0) \cong \mathbb{K}(j(X, S) \times (\mathbb{Z}/2)^\bullet) \cong \mathbb{K}(j(X, S)) \cong \mathcal{A}((X, S))$$

となる^{*8}。しかし、先にも述べたように $j(X, S)$ が対象が一点である自明な圏と圏として同値、すなわちその分類空間は可縮となる。また分類空間 $B(\mathbb{Z}/2)$ は無限次元射影空間 $\mathbb{R}P^\infty$

^{*6}スキーマイドの積はそれぞれの分割の積を用いて自然にスキーマイドになる。

^{*7} $j(X, S)$ は自明な圏と同値であった。したがって $H_{BW}^*(j(X, S) \times (\mathbb{Z}/2)^\bullet, \mathbb{Z}/2) \cong H_{BW}^*((\mathbb{Z}/2)^\bullet, \mathbb{Z}/2) \cong H^*(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ となる。 $H^2(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ より線形拡張の分類定理からスキーマイド拡張として自明なものとしてでないもの 2 つが現れる

^{*8}ここで 2 番目の同型は $j(X, S)$ 上の自明表現 $\mathbb{Z}/2$ によるスキーマイド拡張が分裂し $j(X, S) \times (\mathbb{Z}/2)^\bullet$ という形のスキーマイドと同型であるという事実を用いている。

となるから可縮ではない。このことから $j(X, S) \times (\mathbb{Z}/2)^\bullet$ と $j(X, S)$ は圏として同値ではないことがわかる。

5. スキーモイドの構成方法

前章に引き続き, (擬) スキーモイドの構成方法について考える。ここでは Berger-Leinster による方法に基づき正方行列から小圏を構成し, そこにスキーモイドの構造を入れるという構成方法を紹介する。

$Z = (z_{ij})$ を非負整数を成分とする正方行列とする。 Z は推移的すなわち, $z_{ij}, z_{jk} \geq 1$ ならば $z_{jk} \geq 1$ をみたすとする。さらに対角成分は全て 2 以上であるとする。このとき Berger-Leinster[2] は, 圏の行列が Z である有限小圏 \mathcal{C}_Z を次のように構成した*⁹。

\mathcal{C}_Z の対象がつくる集合を順序集合 $\{i\}_{i \in \text{ob}(\mathcal{C}_Z)}$ とする。 $z_{ij} = \#\text{Hom}_{\mathcal{C}}(i, j)$ とし, 各 i, j に対して $z_{ij} \neq 0$ のとき恒等射ではない $\phi_{ij} : i \rightarrow j$ を一つ選ぶ。射の合成 $i \xrightarrow{\alpha} j \xrightarrow{\beta} k$ を $\alpha \neq 1$ かつ $\beta \neq 1$ のとき $\beta \circ \alpha = \phi_{ik}$ で定める。このとき \mathcal{C}_Z は圏となる。以下では $\{\phi_{ij}\}_{ij}$ を \mathcal{C}_Z の**枠**と呼ぶ。射の合成を全て枠に”押し込める”ことで圏 \mathcal{C}_Z は得られていると言ってよい。

$(X, P = \{P_l\}_{l=0, \dots, s})$ をアソシエーションスキームで $\{(R_l)\}$ をその隣接行列とする。すなわち R_l の (i, j) 成分を $R_l(i, j)$ とすると

$$R_l(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{if } (i, j) \in P_l, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。 $\{(R_l)\}$ を用いてスキーモイドが構成できる。

定理 5.1. [8, Theorem 7.5] 上の記号のもと, 正数 z_0, \dots, z_s に対して

$$Z := z_0 R_0 + z_1 R_1 + \dots + z_s R_s + \text{diag}(1, 1, \dots, 1).$$

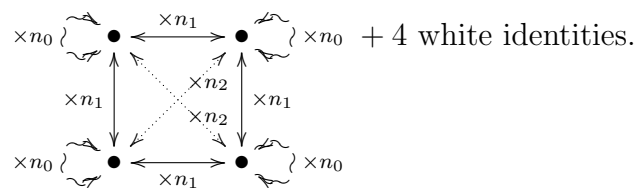
とおく。 $S = \{\sigma_l\}_{l=0, 1, \dots, s}$ を \mathcal{C}_Z の枠 $\{\phi_{ij}\}_{ij}$ の分割とする, ただし $\sigma_0 = \{\phi_{ii} \mid i = 1, \dots, m\}$, $\sigma_l = \{\phi_{ij} \mid (j, i) \in P_l\}$ である。このとき S を含む $\text{mor}(\mathcal{C})$ の分割 Σ が存在して*¹⁰ (\mathcal{C}_Z, Σ) は擬スキーモイドになる。さらに $z_0 = \dots = z_s$ であるとき, (\mathcal{C}_Z, Σ) は単位的スキーモイド構造をもつ。

定理 5.1 の基礎圏 \mathcal{C}_Z は始めに与えられる AS を完全グラフと考えたときその射の集合を”太らせて”得られている。

例 5.2. $H(2, 2)$ を $(2, 2)$ 型の Hamming スキームとする。このとき定理 5.1 の構成にしたがって得られる擬スキーモイドを (\mathcal{C}_Z, Σ) とする。その基礎圏 \mathcal{C}_Z は 4×4 行列

$$Z = \sum_{i=0}^2 n_i R_i + \text{diag}(1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} n_0 + 1 & n_1 & n_1 & n_2 \\ n_1 & n_0 + 1 & n_2 & n_1 \\ n_1 & n_2 & n_0 + 1 & n_1 \\ n_2 & n_1 & n_1 & n_0 + 1 \end{pmatrix}.$$

を用い, 上述の Berger-Leinster の手続きに沿って得られる。さらに Σ は次の図が示すような $\text{mor}(\mathcal{C}_Z)$ の分割である。



*⁹圏の行列 C から圏の Euler 標数が 2 つ定義される。これらの性質が [2] で考察されている。

*¹⁰ Σ の定義は [8, Proposition 7.4] 参照。

6. 展望

(擬) スキーモイドを研究する上での今後の展望を述べてこの稿をおえる。

- Bose-Mesner 代数を経由した圏論的表現論を用いたスキーモイドのホモロジー論的考察: スキーモイドから得られる Bose-Mesner 代数の導来同値の考察など。
- Cat の Quillen モデル圏構造, (コ) ファイブレーション圏構造から $qASmd$ に付加される構造をもとにしたスキーモイドのホモトピー論的考察: 具体的なシリンダー対象を与えた抽象ホモトピー論の展開と $qASmd$ の 2-圏構造を用いたホモトピー論的考察およびホモトピー不変量^{*11}の導入など。

上の2つの考察は決して独立して進むわけではない。実際 $qASmd$ の 2-圏構造を利用すれば適切な擬スキーモイド (C, S) からベクトル空間の圏への関手圏を考えることで Mitchell 対応を模倣できる。すなわち Bose-Mesner 代数 $\mathbb{K}(C, S)$ 上で圏論的表現論, コホモロジー論的表現論の展開が期待できる。(2.1) の図式およびその後のコメントが示すように有限群は AS を経由してスキーモイドの圏に運ばれる。しかし Cat まで持っていった場合それは常に対象が一点である圏と同値になってしまい, そこから面白い表現論, コホモロジー論は展開できない。Webb [10], Xu [11, 12] 等により有限群のコホモロジー論を拡張した小圏のコホモロジー論の研究も進んでいるが, これをそのまま AS に適用することはできない。小圏のコホモロジー論を再構築して別系列のスキーモイドのコホモロジー論をつくる必要があろう。そのキーワードが上述の Mitchell 対応であると考えられる。

また $qASmd$ の 2-圏構造は Cat のそれを拡張して得られる。すなわち上述の充満忠実関手 $K : \text{Cat} \rightarrow qASmd$ は 2-圏の関手となる ([7, Theorem 3.9])。従って Hardie, Kamps, Marcum [5] により圏論的に考察される Toda の積を用いて擬スキーモイドのホモトピー集合を考察することも可能になろう。そうして得られる非自明な元が持つ幾何学的, 代数的組合せ論的意味を探ることにも意味がある。

アソシエーションスキームの研究では閉集合の概念や, Bose-Mesner 代数の表現論的な性質が重要な役割を果たしている ([14])。こうした概念をスキーモイドの場合に一般化しそれらが $qASmd$ や $ASmd$ 内でどのように振る舞うかの研究も重要であろう。実際, 図式 (3.1) 内を移動しながらの考察が再び AS に戻ってくる可能性もある。一般化からの還元も期待できる。

(擬) スキーモイドは [8] ではじめて導入された概念である。まだまだ若く, その性質はほとんど解っていないと言って良い。ホモトピー論的, ホモロジー論的性質の解明やアソシエーションスキームのように代数的組合せ論, デザイン, 符号理論にこの新しい対象が応用されること強く願う。

謝辞 第30回という記念すべき回に伝統ある代数的組合せ論シンポジウムに参加しそして講演出来たことは私にとって非常に光栄なことでした。また講演者, 参加者の方々とアソシエーションスキームの一般化について議論できたこと, さらに今後研究を進める上で重要な助言をして頂いたことは私にとって大きな収穫となりました。最後になりましたが, 講演の機会を与えて頂きました世話人の方々, 北詰正顕氏, 原田昌晃氏, 新谷誠氏そして講演者として推薦して頂いた花木章秀氏に感謝いたします。

REFERENCES

- [1] H. J. Baues and G. Wirsching, Cohomology of small categories, J. Pure Appl. Algebra **38** (1985), 187-211.
- [2] C. Berger and T. Leinster, The Euler characteristic of a category as the sum of a divergent series, Homology, Homotopy and App. **10** (2008), 41-51.

^{*11}[7] では擬スキーモイド間の自己ホモトピー同値写像がつくる群を考察している。

- [3] C. French, Functors from association schemes, *J. Combin. Theory Ser. A* **120** (2013), 1141-1165.
- [4] A. Hanaki, A category of association schemes, *J. Combin. Theory Ser. A* **117** (2010), 1207-1217.
- [5] K. A. Hardie, K. H. Kamps and H. J. Marcum, A categorical approach to matrix Toda brackets. *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 4625-4649.
- [6] P. Gabriel and M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35* Springer-Verlag New York, Inc., New York 1967.
- [7] K. Kuribayashi, On the strong homotopy for quasi-schemoids, preprint, 2013.
- [8] K. Kuribayashi and K. Matsuo, Association schemoids and their categories, to appear in *Applied Categorical Structures*, preprint (2013). [arXiv:1304.6883 math.CT](https://arxiv.org/abs/1304.6883).
- [9] R. W. Thomason, *Cat as a closed model category*, *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, **21**(1980), 305-324.
- [10] P. Webb, *An introduction to the representations and cohomology of categories. Group representation theory*, 149-173, EPFL Press, Lausanne, 2007.
- [11] F. Xu, Representations of categories and their applications. *J. Algebra* **317** (2007), 153-183.
- [12] F. Xu, Hochschild and ordinary cohomology rings of small categories. *Adv. Math.* **219** (2008), 1872-1893.
- [13] P. -H. Zieschang, Homogeneous coherent configurations as generalized groups and their relationship to buildings, *Journal of algebra*, **178** (1995), 677-709.
- [14] P. -H. Zieschang, *Theory of association schemes*, Springer Monographs in Math., Springer-Verlag, Berlin, 2005.