曲面同相写像の一般化レフシェッツ数について

鳴門教育大学　松岡　隆

2007 年 9 月 7 日,「空間の代数的・幾何的モデルとその周辺」研究集会

１．一般化レフシェッツ数の定義

X を有限セル複体とし，$f : X \to X$ を連続写像とする．レフシェッツ数 $L(f) = \sum_q (-1)^q \mathrm{tr}\,[f_* : H_q(X) \to H_q(X)]$ は，不動点集合 $\mathrm{Fix}(f)$ の不動点指数 $\mathrm{ind}(\mathrm{Fix}(f))$ と一致する．一般化レフシェッツ数は，f の基本群上の作用を用いて $\mathrm{Fix}(f)$ を分割することにより得られるレフシェッツ数の精密化である．x_0 を基点とし，$\pi = \pi_1(X, x_0)$ とおく．

定義 1　準同形 $\psi : \pi \to \pi$ に対し，

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \pi \text{ が Reidemeister 同値（}\psi\text{-共役）} \iff {}^{\exists}\lambda \in \pi \text{ s.t. } \lambda_2 = \psi(\lambda)\lambda_1\lambda^{-1}.$$

Reidemeister 同値類全体の集合を $\mathcal{R}(\psi)$ と表す．

x_0 から $f(x_0)$ への道 τ を一つ固定し，base path とよぶ．$f_\pi = \tau_*^{-1} \circ f_* : \pi \to \pi$ とおく．

定義 2　$x \in \mathrm{Fix}(f)$ に対し, x_0 から x への道 l をとるとき, $[\tau(f \circ l)l^{-1}] \in \pi$ の f_π に関する Reidemeister 同値類は l の取り方によらない．これを $R(x)$ と表し，x の Reidemeister 類とよぶ．$\alpha \in \mathcal{R}(f_\pi)$ に対し，$\mathrm{Fix}_\alpha(f) = \{x \in \mathrm{Fix}(f) \mid R(x) = \alpha\}$ とおき，α に対応する不動点類とよぶ．

定義 3（一般化レフシェッツ数）　$\mathcal{L}(f) = \displaystyle\sum_{\alpha \in \mathcal{R}(f_\pi)} \mathrm{ind}(\mathrm{Fix}_\alpha(f)) \cdot \alpha \ \in \mathbb{Z}\mathcal{R}(f_\pi).$

★ 一般化レフシェッツ数の性質

（１）ホモトピー不変性：f，g をホモトピック，$\{h_t\}$ をホモトピーとする．g に対する base path を τ と $h_t(x_0)$ の積で定義すると，$f_\pi = g_\pi$ より $\mathcal{R}(f_\pi) = \mathcal{R}(g_\pi)$．このとき，$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ が成り立つ．

（２）$L(f)$ は $\mathcal{L}(f)$ の係数の和と一致する．

（３）可換性：$u : X \to Y, v : Y \to X$ に対し，適当な base path を取れば，$u_\sharp(\mathcal{L}(v \circ u)) = \mathcal{L}(u \circ v)$．ここに，$u_\sharp : \mathbb{Z}\mathcal{R}((v \circ u)_{\pi_1(X)}) \to \mathbb{Z}\mathcal{R}((u \circ v)_{\pi_1(Y)})$ は，$\alpha \in \mathcal{R}((v \circ u)_{\pi_1(X)})$ に対し，$u_\sharp(\alpha)$ を $\alpha \subset \pi_1(X)$ の $u_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ による像とおいて定義される．特に，$f : X \to X, g : Y \to Y$ が，同相写像 $h : X \to Y$ に対し $f = h^{-1} \circ g \circ h$ をみたせば，$h_\sharp(\mathcal{L}(f)) = \mathcal{L}(g)$．（$u = h, v = f \circ h^{-1}$ とおけばよい）

一般化レフシェッツ数を定義自体から計算することは難しい．次の公式は，セル写像に対する計算のための手段を与える．

★ Reidemeister トレース公式

普遍被覆 $\tilde{X}$ への π の作用は，チェイン群 $C_q(\tilde{X})$ への群環 $\mathbb{Z}\pi$ の作用を導く．この作用により，$C_q(\tilde{X})$ は有限生成自由 $\mathbb{Z}\pi$-加群となり，リフト $\tilde{f}$ が導く写像 $\tilde{f}_\sharp : C_q(\tilde{X}) \to C_q(\tilde{X})$ は，$\mathbb{Z}\pi$ の元を成分とする行列で表される．そのトレースの $\mathbb{Z}\pi \to \mathbb{Z}\mathcal{R}(f_\pi)$ による像は，$C_q(\tilde{X})$ の基の取り方によらないことが分

かる．この像を tr $\tilde{f}_\sharp$ とかき，Reidemeister トレースという．このとき，次が成り立つ．（Reidemeister 1936, Wecken 1941, Husseini 1982）

$$\mathcal{L}(f) = \sum_q (-1)^q \mathrm{tr}\,[\tilde{f}_\sharp : C_q(\tilde{X}) \to C_q(\tilde{X})].$$

２．穴あき円板上での計算

Reidemeister トレース公式のような計算手段はあるものの，基本群が無限非可換である場合には，一般化レフシェッツ数を具体的に求めることはやはり困難であり，ある大きなクラスのホモトピー類について計算された例はまだ無い．ここでは，穴あき円板上の同相写像に対し一般化レフシェッツ数を計算する．ただし，一般化レフシェッツ数そのものではなく，$\mathbb{Z}\pi$ の元でその $\mathbb{Z}\pi \to \mathbb{Z}\mathcal{R}(f_\pi)$ による像が一般化レフシェッツ数に一致するものを求めることにする．

D を閉円板とし，D_n を D から互いに素な n 個の閉円板の内部を除いた曲面とする．$f : D_n \to D_n$ を向きと外側の境界成分 ∂D を保つ同相写像とする．このとき，イソトピー $\{f_t : D \to D\}$ で $f_0 = \mathrm{id}, f_1|_{D_n} = f$ となるものが存在する．n 次の組みひも群を B_n とかく．$D \times [0,1]$ の部分集合 $\bigcup_{0\le t\le 1}(f_t(D - D_n) \times \{t\})$ は n 本のチューブの集まりであるが，これらを n 本のひもとみなすと，組ひも $\beta(f) \in B_n$ が得られる．f のイソトピー類（ホモトピー類）は，full-twist braid θ の冪を除いて，$\beta(f)$ と同一視される．

$\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ を B_n の標準的な生成元とし，$\rho = \sigma_{n-1}\cdots\sigma_1 \in B_n$ とおく．これは θ の n 乗根である．自然数列 $I = (i_1, \ldots, i_d)$ に対し，$\beta(I) = \sigma_1^{i_1}\rho\cdots\sigma_1^{i_d}\rho \in B_n$ とおくと，任意の組みひもは，$\theta^\mu\beta(I)$ $(\mu \in \mathbb{Z})$ の形の組みひもと共役である [3]．以下では，一般化レフシェッツ数 $\mathcal{L}(f)$ を，$\beta(I)$ を用いて計算した結果を述べる．

d を自然数とする．$1 \le p, q \le d$ に対し，

$$[p,q] = \begin{cases} \{p, \ldots, q\} & p \le q \text{ のとき}, \\ \{p, \ldots, d, 1, \ldots, q\} & p > q \text{ のとき} \end{cases}$$

とおき，$[1,d] = \{1, \ldots, d\}$ 内のブロックとよぶ．

定義 4 (1) ブロックの集まり $\{B_1, \ldots, B_s\}$ が $[1,d]$ の分割 $\iff$

$[1,d] = B_1 \cup \cdots \cup B_s$ (disjoint)　かつ　各ブロックの長さは $n-1$ 以下．

(2)　$[1,d]$ の分割全体の集合を $\mathcal{P}(d)$ と表す．

例：$n = 4$ のとき，$\mathcal{P}(4)$ は次の 11 個の分割からなる．

$$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\},\ \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\},\ \{\{1\},\{2,3\},\{4\}\},\ \{\{1\},\{2\},\{3,4\}\},\ \{\{2\},\{3\},\{4,1\}\},$$
$$\{\{1,2\},\{3,4\}\},\ \{\{2,3\},\{4,1\}\},\ \{\{1,2,3\},\{4\}\},\ \{\{1\},\{2,3,4\}\},\ \{\{2\},\{3,4,1\}\},\ \{\{3\},\{4,1,2\}\}$$

基本群 $\pi_1(D_n)$ を階数 n の自由群 F_n と同一視する．$x_1, \ldots, x_n \in F_n$ を $\pi_1(D_n)$ の標準的な生成元に対応する元とし，$a_1, \ldots, a_n \in F_n$ を，$a_i = x_1 \cdots x_i$ で定義する．$j \ge 0$ に対し，$g_j \in \mathbb{Z}F_n$ を

$$g_j = \begin{cases} -a_2^{j/2} & j \text{ even}, \\ a_1 a_2^{(j-1)/2} & j \text{ odd} \end{cases}$$

で定める．B_n は次により F_n へ作用する（$a_0 = e$ とおく）．

$$\sigma_i : a_j \longrightarrow \begin{cases} a_{i+1}a_i^{-1}a_{i-1} & (j = i), \\ a_j & (j \neq i). \end{cases}$$

従って，組みひも β は，同形写像 $\beta : F_n \to F_n$ を与える．$w \in F_n$ の β による像を w^β と表すことにする．base path τ を $\tau(t) = f_t(x_0)$ で定めると，$f_\pi = \beta(f) : F_n \to F_n$ となる．

$1 \leq \ell \leq d$ に対し，$\beta_\ell(I) = \beta(i_\ell, \ldots, i_d)$ とおく．ブロック $B = [p, q]$ に対し，$\alpha(B), \omega(B) \in B_n$ を次で定義する（i_{d+1} は i_1 と解釈する）．

$$\alpha(B) = \beta_p(I), \quad \omega(B) = \begin{cases} \beta_q(I) & \text{if} \quad p \leq q, \\ \beta_q(I)\beta(I)^{-1} & \text{if} \quad p > q. \end{cases}$$

$W_I(B) \in \mathbb{Z}F_n$ を次で定義する:

$$W_I(B) = \begin{cases} (g_0 + \cdots + g_{i_p - 2})^{\alpha(B)} a_{|B|+1}^{\omega(B)} & \text{if} \quad |B| < n-1,\ i_p \geq 2, \\ 0 & \text{if} \quad |B| < n-1,\ i_p = 1, \\ g_{i_p}^{\alpha(B)} a_{n-1}^{\omega(B)} & \text{if} \quad |B| = n-1. \end{cases}$$

$\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_s\} \in \mathcal{P}(d)$（$1 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_s \leq d$）に対し $W_I(\mathcal{B}) = W_I(B_1) \cdots W_I(B_s) \in \mathbb{Z}F_n$ とおく．

$\Phi_\beta : \mathbb{Z}F_n \to \mathbb{Z}\mathcal{R}(\beta)$ を標準的全射とする．${}^\forall w \in F_n, {}^\forall \beta \in B_n$ に対し $\Phi_\beta(w^\beta) = \Phi_\beta(w)$ が成り立つ．

定理　$\beta(f) = \theta^\mu \gamma^{-1} \beta(I) \gamma$ とする．ここに，$\mu \in \mathbb{Z}, \gamma \in B_n$, I は長さ d の自然数列．このとき，

$$\mathcal{L}(f) = -\Phi_{\beta(f)}\left(a_n^\mu \sum_{\mathcal{B} \in \mathcal{P}(d)} W_I(\mathcal{B})^\gamma \right) \in \mathbb{Z}\mathcal{R}(\beta(f)).$$

例：$\beta(f) = \beta(m)$, $m \geq 2$ のとき，$\mu = 0, \gamma = e, d = 1, \mathcal{P}(d) = \{\{\{1\}\}\}, \alpha(\{1\}) = \omega(\{1\}) = \beta(m)$ より，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= -\Phi_{\beta(f)}(W_{(m)}(\{1\})) = -\Phi_{\beta(m)}((g_0 + \cdots + g_{m-2})^{\beta(m)} a_2^{\beta(m)}) \\ &= -\Phi_{\beta(m)}(g_2) - \cdots - \Phi_{\beta(m)}(g_m). \end{aligned}$$

★ 定理の証明の方針

X が境界をもつ曲面のとき $\tilde{f}_\sharp : C_1(\tilde{X}) \to C_1(\tilde{X})$ は，Fox 微分によるヤコビ行列 $J(f_\pi) = (\partial f_\pi(a_i)/\partial a_j)$ で表される [1]．ヤコビ行列の計算を

$$a_k^{\sigma_1^i \rho} = \begin{cases} (a_3 a_1^{-1})^{\frac{i-1}{2}} a_3 a_2^{-1} (a_3 a_1^{-1})^{-\frac{i-1}{2}} & (k = 1, i \text{ odd}) \\ (a_3 a_1^{-1})^{\frac{i}{2}} a_2 a_1^{-1} (a_3 a_1^{-1})^{-\frac{i}{2}} & (k = 1, i \text{ even}) \\ a_{k+1} a_1^{-1} & (2 \leq k \leq n-1) \\ a_n & (k = n) \end{cases}$$

を用いて計算することにより，定理が得られる．

注１：Reidemeister 類を mapping torus を用いて定義することもできる（[2] 参照）．T を f の mapping torus $\bigcup_{0 \leq t \leq 1} (f_t(D_n) \times \{[t]\})$ $(\subset D \times S^1)$ とするとき，$\mathcal{R}(f_\pi)$ は，T 内の閉曲線の自由ホモトピー類全

体の集合と同一視できる．$x \in \mathrm{Fix}(f)$ に対し，その Reidemeister 類 $R(x)$ は，閉曲線 $(f_t(x), [t]) \in T$ のホモトピー類に対応する．

注２：$-\mathcal{L}(f)$ の $\mathbb{Z}F_n \to \mathbb{Z}\mathbb{Z}$ による像は，組ひも $\beta(f)$ の被約 Burau 行列のトレースに一致する．このトレースは，[3] において，ここでと同様に I によって表されている。上の定理はその精密化である．

３．曲面同相写像の分類への応用

曲面同相写像の Nielsen-Thurston 分類理論における，有限位数写像，擬アノソフ写像，reducible 写像を，合わせて標準写像とよぶ．標準写像 φ はそのイソトピー類の中で最も簡単な力学系的複雑さをもつことから，２次元力学系理論における重要な研究対象の一つとなっている．ここでは，D_n 上の標準写像 φ で向きと ∂D を保つものに対し，∂D 上の周期点について考える．これら周期点は同一周期をもち，これを $m(\varphi)$ とおく．また，それらの Reidemeister 類は，a_n の冪で代表されるが，この冪を $a_n^{\nu(\varphi)}$ とかく．$m(\varphi), \nu(\varphi)$ を決定する問題を考える．

補題　整数 $m > 0, \nu$ が互いに素で，$\mathcal{L}(\varphi^m)$ における $\Phi_{\beta(\varphi^m)}(a_n^\nu)$ の係数が 0 でないなら，$m(\varphi) = m, \nu(\varphi) = \nu$.

この補題より，$m(\varphi), \nu(\varphi)$ を求めるために一般化レフシェッツ数を利用することができることが分かる．実際，定理を応用して，次が導かれる．

命題１． $\beta(\varphi)$ は $\beta(I)$ と共役とする．$n \geq 4,\ i_1, \ldots, i_d \geq 2$ または $n = 3,\ i_1, \ldots, i_d \geq 3$ とするとき，

$$m(\varphi) = \frac{\mathrm{LCM}\{d, n-2\}}{d}, \quad \nu(\varphi) = \frac{\mathrm{LCM}\{d, n-2\}}{n-2}.$$

f が与えられたとき，そのイソトピー類に属する標準写像を決定する問題に関しては，Bestvina-Handel によるものなど幾つかのアルゴリズムが知られているが，実際にアルゴリズムを実行することは容易なことではない．命題１を用いて次が分かる．

命題２． $\beta(\varphi)$ は $\beta(I)$ と共役とする．$n \geq 5$ で I の項はすべて奇数か，すべて偶数とするとき，φ は擬アノソフ写像であり，対応する foliation は内部特異点をもたない．

参考文献

[1] E. Fadell and S. Husseini, The Nielsen number on surfaces, *Topological Methods in Nonlinear Functional Analysis* (S. P. Singh et al., eds.), Contemp. Math. Vol. 21, Amer. Math. Soc., Providence (1983), pp. 59–98.

[2] B. Jiang, A primer of Nielsen fixed point theory, *Handbook of Topological Fixed Point Theory* (R.F. Brown, M. Furi, L. Górniewicz and B. Jiang eds.), Sprinegr, 2005, pp. 617–645.

[3] T. Matsuoka, The Burau representation of the braid group and the Nielsen-Thurston classification, *Nielsen Theory and Dynamical Systems* (C. McCord, ed.), Contemp. Math. Vol. 152, Amer. Math. Soc., Providence, 1993, pp. 229–248.