# 自己ホモトピー同値群とその部分群

丸山　研一
千葉大学・教育学部

## 1　Notation など

$X$ を空間とし、写像は base point を保つものを考える。
**Definition 1.1** $\mathcal{E}(X) = \{f \in [X, X] |\ f$ はホモトピー同値写像 $\}$

例　$\mathcal{E}(S^n) = \mathbf{Z}_2$,　$\mathcal{E}(K(\pi, n)) = \mathrm{Aut}(\pi)$, $\mathcal{E}(RP^n) = \mathbf{Z}_2$, $\mathcal{E}(CP^n) = \mathbf{Z}_2$
ここに $\mathrm{Aut}(\pi)$ は群 $\pi$ の自己同型群を表す。

**Definition 1.2** $h$ をホモトピー関手とするとき
$\mathcal{E}(X) \to \mathrm{Aut}(h(X))$ の核を $\mathcal{E}_h(X)$ と書く。特に、$\mathcal{E}(X) \to \prod_1^n \mathrm{Aut}(\pi_i(X))$ の核を $\mathcal{E}_\#^n(X)$ と書く。

## 2　有限表示性に関連して

Sullivan[S]，Wilkerson [W] の定理。
**定理 2.1** $X$ が有限冪零空間であれば $\mathcal{E}(X)$ は有限表示可能である。

**定理 2.2** [HU][M2] $X$,$Y$ を有限冪零空間とする。写像の結合から得られる自然な作用

$$\mathcal{E}(X) \times [Y, X] \to [Y, X]$$

$$\mathcal{E}(X) \times [X, Y] \to [X, Y]$$

に対しその等方部分群 $\mathcal{E}(X)_S$ は有限表示可能な $\mathcal{E}(X)$ の部分群。ここに $S$ は $[Y, X]$ または $[X, Y]$ の有限部分集合で、$S = \{s_1, \cdots, s_r\}$ のとき $\mathcal{E}(X)_S$ は $\cap_i \mathcal{E}(X)_{s_i}$ を表すとする。

**系 2.3** $X$ を有限冪零空間とするとき、$\mathcal{E}_\#^n(X)$ は有限表示可能である。

**定理 2.4** [M2] $X$ を有限冪零空間とするとき、$\mathcal{E}(X)$ の冪零部分群は有限表示可能である。

## 3 代表的な冪零部分群

$\mathcal{E}_{\#}^{\dim X}(X)$ を $\mathcal{E}_{\#}(X)$ と書くことにする。

**定理 3.1** [DZ] $X$ が有限次元なら $\mathcal{E}_{\#}(X)$ は冪零群。さらに $X$ が有限冪零空間なら $\mathcal{E}_{H_*}(X)$ も冪零群。

注。実際はもう少し一般的な形で定理が述べられている。

**Definition 3.2** $\mathcal{E}_{\Omega}(X) = \{f \in \mathcal{E}(X) |\ \Omega f \simeq 1\}$, $\mathcal{E}_{\Sigma}(X) = \{f \in \mathcal{E}(X) |\ \Sigma f \simeq 1\}$.

定義からそれぞれ

$$\mathcal{E}_{\Omega}(X) \subset \mathcal{E}_{\#}(X), \quad \mathcal{E}_{\Sigma}(X) \subset \mathcal{E}_{H_*}(X)$$

となっているので上の定理の条件の下でこれらの部分群も冪零群である。$\mathcal{E}_{\Omega}(X)$ は Felix と Murillo が研究しはじめた部分群で、$\mathcal{E}_{\#}^{\infty}(X)$ に同型かという問題があるが（Arkowitz)、今のところ未解決である。部分的な結果としては、$X$ が球面の積空間 [P] のときや、更に一般に $\Sigma\Omega X$ が球面の積となるような $X$ のときにも $\mathcal{E}_{\Omega}(X) \cong \mathcal{E}_{\#}^{\infty}(X)$ が成立することも知られている [AOS]。 別な方向では、次もある。

**定理 3.3** [M3] $X$ はホモトピー結合的な有限 $H$-空間で単連結とする。$X$ が *p-regular* なら $\mathcal{E}_{\Omega}(X)_{(p)} \cong \mathcal{E}_{\#}^{\infty}(X)_{(p)}$

**問題** $X$ が $(co)H$-space のとき $\mathcal{E}_{H_*}(X)$ と $\mathcal{E}_{\#}(X)$ の間の関係は？

## 4 群のランク

**Definition 4.1** 群 $G$ が有限のランクであるとは次のような部分群の列があることである。

$$G = G_0 \ \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_t = 0$$

ここに $G_i/G_{i+1}$ は無限巡回群であるかまたはすべての元が有限位数であるという条件をみたす。

$G$ が有限のランクであるとき無限巡回群の個数を $G$ のランクと呼び $\rho(G)$ と書く。$H$-空間や $coH$-空間の時にはランク $\rho(\mathcal{E}(X))$ を求めることは可能であるが、一般の空間に対しての公式はないようである。

**問題** $X$ 任意の空間とするとき、$\rho(\mathcal{E}(X)) = ?$

## 5 実現問題

**定理 5.1** [O] $n$ が 8 の倍数ではない，または $n \equiv 16 \mod 32$ である、のいずれかが成立すればある有限複体 $X$ で $\mathcal{E}(X) = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ となるものがある。

無限巡回群 $\mathbf{Z}$ は Kahn[K] によって無限次元空間での実現が示されたが、さらに [M1] では有限複体 $X$ で $\mathcal{E}(X) = \mathbf{Z}$ であるものが作れる。

**定理 5.2** [M1] 胞体構造 $X = S^4 \cup e^8 \cup e^8$ を持つ空間で $\mathcal{E}(X) = \mathbf{Z}$ となるものがある。

**問題**　階数２以上の有限生成自由アーベル群は有限複体の $\mathcal{E}(X)$ で実現できるか。
またランクを利用するとさらに次のような（negative な）結果が得られる。

**定理 5.3** $X$ を有限複体とする。$\mathcal{E}^s(X)$ が有限のランクであればそれは有限群でなければならない。ここで、$\mathcal{E}^s(X) = \mathcal{E}^(\Sigma^N X)$, $N$ 十分大。

したがって有限生成のアーベル群は有限群のときを除いて $\mathcal{E}^s(X)$ では実現できない。

# 参考文献


[AOS] M. Arkowitz, H. Oshima and J. Strom. Homotopy classes of self-maps and induced homomorphismss of homoyopy groups. J. Math. Soc. Japan. **58**, 401-418, 2006.

[DZ] E. Dror and A. Zabrodsky. Unipotency and nilpotency in homotopy equivalences. Topology **18**, 187-197, 1979

[HU] S. Hurvitz. The automorphism groups of spaces and fibrations. Pacific J. Math. **96**, 371-388, 1981.

[K] D. W. Kahn. Realization problems for the group of homotopy classes of self-equivalences. Math. Ann. **230**, 37-46, 1976.

[M1] K. Maruyama. Finite complexes whose self-homotopy equivalence groups realize the infinite cyclic group. Canadian Mathematical Bulletin,**37**, 534-536, 1994.

[M2] K. Maruyama. Finitely presented subgroups of the self-homotopy equivalences group. Math. Z. **221**, 537-548, 1996.

[M3] K. Maruyama. Localization and completion of nilpotent groups of automorphisms. Topology, **46**, 319-341, 2007.

[O] S. Oka. Finite complexes whose self-homotopy equivalences form cyclic groups. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser A, 171-181, 1980.

[P] P. Pavešić. On self-maps which induce identity automorphisms of homology groups. Glasgow Math. J. **43**, 177-184, 2001.

[S] D. Sullivan. Infinitesimal computations in topology. Pub. Math. IHES **47**, 269-331, 1977.

[W] C. Wilkerson. Applications of minimal simplicial groups. Topology **15**, 115-130, 1976.