

Topological categories with discrete objects

信州大学理学部 田中 康平

small category を2つの集合と structure map から構成されるものと思うと、それを空間と連続写像に置き換えて topological category が定義される。object の空間が discrete であるときには、空間で enrich された category とも考えられる。

Definition 0.0.1

small category C とは、集合 C_0, C_1 と、structure map と呼ばれる写像、

$$C_1 \times_{C_0} C_1 \xrightarrow{\mu} C_1 \rightrightarrows_t^s C_0 \xrightarrow{i} C_1$$

から構成され、unit、associativity condition を満たすものである。 C_0, C_1 が空間で、structure map がすべて連続のとき、 C を topological category と呼ぶ。

object が discrete な topological category 間の continuous functor で、空間の category における weak equivalence (weak homotopy equivalence) と small category における weak equivalence (equivalence) を mix した形で DK-equivalence が定義される。

Definition 0.0.2

$F : C \rightarrow D$ を discrete objects をもつ topological category 間の continuous functor としたとき、

1. $F : \text{Hom}_C(x, y) \rightarrow \text{Hom}_D(Fx, Fy)$ が各 object に関して weak homotopy equivalence
2. $\pi_0 F : \pi_0 C \rightarrow \pi_0 D$ が small category における equivalence

を満たすとき、 F を DK-equivalence と呼ぶ。

simplicial set で enrich された category (simplicial category) にならって、topological category も空間的な側面から groupoid completion [DK80] や DK-equivalence を weak equivalence とした model structure [Be04],[St08] を考える。また、[CJS95] で Morse 関数から、その多様体の homotopy 型を現す object が discrete な topological category を構成している例を紹介する。

Reference

- [DK80] W. Dwyer / D. Kan, *Simplicial localizations of categories*
- [Be04] J. Bergner, *A model structure on the category of simplicial categories*
- [St08] A. Stanculescu, *A model structure on the category of simplicial multicategories*
- [CJS95] R. Cohen / J. Jones / G. Segal, *Morse theory and classifying spaces*