A finite-dimensional formulation of twisted K-theory

五味 清紀
The University of Texas at Austin

本講演の主題は,「捩られた K 理論 (twisted K-theory) を有限次元的な幾何学的対象で一般的に実現せよ」という問題に対する私の解答である.

捩られた K 理論 (twisted K-theory)[1] は, 位相的 K 理論の変種の一つである. それは 1970 年の P. Donovan と M. Karoubi の仕事, 及び 1989 年の J. Rosenberg の仕事に起源を持っている. 最近になって, D ブレーンの Ramond-Ramond チャージ, Verlinde 代数や量子 Hall 効果などへ応用され, 多く数学者・物理学者の興味をひいている.

よく知られるように, 位相的 K 理論については, 少なくとも次のような定式化の方法をがある:

(i) ベクトル束を用いる定義;
(ii) Fredholm 作用素の空間を用いる定義;
(iii) C^* 代数を用いる定義.

(i) の定式化においては, ベクトル束として有限次元のものだけを使えばよいという意味で,「有限次元的な定式化」である. 一方で, (ii) と (iii) の定式化においては, 無限次元空間を使うことが避けられず,「無限次元的な定式化」ということができる.

捩られた K 理論の定式化として, これまで知られていたのは, 上の (ii) または (iii) の「無限次元的な定式化」を「捩る」ような定式化である. 具体的に (ii) に相当する定式化を述べると次のようになる: $\mathcal{H}$ を無限次元可分 Hilbert 空間とし, $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ に作用する Fredholm 作用素の空間とする. また, $PU(\mathcal{H}) = U(\mathcal{H})/U(1)$ を $\mathcal{H}$ の射影ユニタリー群とすると, この群は $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ に共役によって作用している.

定義 . コンパクト位相空間 X に対して, 主 $PU(\mathcal{H})$ 束 $P \to X$ によって捩られた X の K 群 $K_P(X)$ とは, X 上のファイバー束 $P \times_{Ad} \mathcal{F}(\mathcal{H}) \to X$ の切断全体の集合を, ファイバーを保つホモトピーで割って得られる同値類集合のことである*:*

$$K_P(X) := \Gamma(X, P \times_{Ad} \mathcal{F}(\mathcal{H}))/\text{ホモトピー}.$$

もし, P が自明な束 $X \times PU(\mathcal{H})$ であれば, $K_P(X) \cong [X, \mathcal{F}(\mathcal{H})]$ となり, これは X の K 群 $K(X)$ に他ならない.

さて, 捩られた K 理論は (ii) または (iii) に相当する「無限次元的な定式化」を持つが, (i) に相当する「有限次元的な定式化」を持つであろうか? これが, 冒頭で述べた問題の意味するところである. この問題に対して肯定的な解答を与えるのが, 本講演の主定理である:

定理 ([4]). *CW 複体 X とその上の主 $PU(\mathcal{H})$ 束 $P \to X$ に対して, 「捩られた Hermite 一般ベクトル束」のホモトピー類のなす群を $KF_P(X)$ とあらわす. このとき, 自然な同型 $\alpha : K_P(X) \longrightarrow KF_P(X)$ が存在する.*

「Hermite 一般ベクトル束」は [3] で古田幹雄氏によって導入された概念であり, 通常のベクトル束の概念の一般化である. これに対して主 $PU(\mathcal{H})$ 束による「捩れ」を導入することにより, 「捩られた Hermite 一般ベクトル束」が定義される. 一般に, Fredholm 作用素の族を有限次元近似することによって, Hermite 一般ベクトル束が得られる. この有限次元近似が同型写像 α の構成に用いられている.

定理の証明は, $K_P(X)$ と $KF_P(X)$ から「コホモロジー理論」をそれぞれ構成し, それらを比較する, という方法でなされている.

定理の応用としてあげられるのは, Brylinski による 2-直線束の概念 [2] の一般化である. これは, 捩られた Hermite 一般ベクトル束のなす圏の層 (stack) を考えることによって与えられる. 別の応用として, 捩られた K 理論に対する Chern 指標の有限次元的な構成をあげられる ([5]).

参考文献

[1] M. Atiyah and G. Segal, *Twisted K-theory.* Ukr. Mat. Visn. 1 (2004), no. 3, 287–330; translation in Ukr. Math. Bull. 1 (2004), no. 3, 291–334

[2] J-L. Brylinski, *Categories of vector bundles and Yang-Mills equations.* Contemp. Math., 230, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[3] 古田幹雄, 指数定理 *2.* 岩波講座 現代数学の展開. 2002. 岩波書店.

[4] K. Gomi, *Twisted K-theory and finite-dimensional approximation.* 26 pages, arXiv:0803.2327

[5] K. Gomi and Y. Terashima, *Chern-Weil construction for twisted K-theory.* 22 pages, preprint.