有理モデルで見る Gottlieb 写像

山口俊博　高知大学教育学部（tyamag@kochi-u.ac.jp）　2008/9/11

概 要

基点付き CW 複体のホモトピー圏において、Gottlieb 空間の写像版として Gottlieb 写像を定義し、Sullivan による有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の代数的モデル（DGA）とその導分を使って、写像 $f : E \to B$ が Gottlieb 写像になるある条件を考えたり、その障害群 $O(f) = \oplus_i O_i(f)$ の階数を計算する ([32])。

定義 [8]:B を弧状連結な基点付き CW 複体とする。B の n 次 **Gottlieb 群** $G_n(B)$ とは、$(a|id_B) : S^n \vee B \to B \vee B \to B$ に対しある写像 $F_a : S^n \times B \to B$ があって、ホモトピー可換図：

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} B \times S^n \arrow[dr, dotted, "F_a"'] & B \vee S^n \arrow[l, "incl."'] \arrow[d, "(id_B|a)"] \\ & B. \end{tikzcd}$$

を満たすような $[a] \in [S^n, B] = \pi_n(B)$ の部分集合 (群になる) をいう。この F_a を a の提携写像 (affiliated map) という。日本語での解説としては [23, §3] を参照。

Gottlieb [8] は、n が偶数のとき $G_n(S^n) = 0$、 n が奇数で $n \neq 1, 3, 7$ のとき $G_n(S^n) = 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} = \pi_n(S^n)$、$n = 1, 3, 7$ のとき $G_n(S^n) = \pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ を計算した。球面の Gottlieb 群の最近の結果については [6] を参照。[1], [13] では、ある種の自己ホモトピー同値写像のホモトピー同値群と Gottlieb 群との関係について述べられており、[9],[18] では、トーラスランクやシンプレクテック多様体との関係について…等、Gottlieb 群はホモトピー論においてますます活発に研究されつつある [25]。有理ホモトピー論における状況としては、ホモトピー群 $\pi_*(X) = \oplus \pi_i(X)$ の階数が有限な単連結有限 CW 複体で、Sullivan のモデル $M(X)$ がわかっている場合は、有理 Gottlieb 群 $G_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ の計算は容易である。X がただの単連結有限複体のとき大域的な性質としてよく知られていることとして、$G_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ は奇数次のみとか、$\mathrm{rank} G_*(X) \leq cat(X)$ などがある [3],[4, p.392]。わからないこととして例えば、**Félix の予想** [25],[4, p.518]「X が n-次元 CW 複体のとき、$G_{\geq 2n}(X) \otimes \mathbb{Q} = 0$ か？」があり、その方向の進展はまだないようである。

定義 [8],[28],[15] : 空間 X は、全ての正数 n に対して $G_n(X) = \pi_n(X)$ をみたすとき、**Gottlieb 空間** (ここでは簡単のため「G-空間」) という。

例 : B が H 空間なら、$B \times S^n \stackrel{1\times a}{\to} B \times B \stackrel{\mu}{\to} B$ から、Gottlieb 空間になる。逆はいえない [28] が、B が可縮でなく $H_*(B)$ が有限生成な G-空間なら $\chi(B) = 0$ [8, Theorem 7.3]。

定理 [28] : 単連結有限複体 X に対し、$X_{\mathbb{Q}}$ (:= X の有理化) が Gottlieb 空間である必要十分条件は、$X_{\mathbb{Q}}$ が H-空間。

さて、$G_*(\ \ )$ は 関手（functor）ではない ！　つまり $f : E \to B$ は、$\pi_n(f) : \pi_n(E) \to \pi_n(B)$ において、写像「$\pi_*(f) : G_*(E) \to G_*(B)$」(*) を導かない。例えば、$G_1(S^1 \vee S^1) = 0$ [8] だから、$i : E = S^1 \hookrightarrow S^1 \vee S^1 = B$ は (*) を導かない。では導くのはどういう時なのだろうか？　その十分条件を扱った研究は、６０年代の Gottlieb[8]、J.Lang[15]、J.Siegel[28] にすでにある。ここでは一応言葉としてちゃんと記述することから始めたい。

定義 [32] : $f : E \to B$ が、 $\pi_n(f) : \pi_n(E) \to \pi_n(B)$ において、全ての正数 n に対し $\pi_n(f)G_n(E) \subset G_n(B)$ を導くなら、**Gottlieb 写像** (ここでは簡単のため「G-写像」) という。

この定義は相対的なもの (E, B は G-空間でなくていい) であり、例えば H-空間間の写像 $X \to Y$ が H-写像 [23] というのとは意味あいが違うことを注意しておく。Siegel[28]（Lang[15]）はリー群 G とその閉部分群 K に対し、$G/K \times S^n \stackrel{1\times a}{\to} G/K \times G \stackrel{\mu}{\to} G/K$ （$a \in \pi_n(G)$）によって、$f : G \to G/K$ は全ての正数 n に対し $\pi_n(f)\pi_n(G) \subset G_n(G/K)$ をみたすことを示した。とくにこの f は G-写像である。Gottlieb は [7] において「ファイバーのどのような自己ホモトピー

同値写像が全空間へ拡張されるか？」と問題提議しているが、「ファイバー間のどのような写像 $f : E \to B$ が全空間への写像 f' へ拡張されるか？ [32]」ともっと一般的に考えてみる（下の図 (i) 参）。もし拡張されるなら、全ての n に対し下の可換図 (ii) が存在する [7]。

$$(i)\quad \begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & E' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f'"'] & Y \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r] & B' \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \qquad (ii)\quad \begin{tikzcd} \pi_{n+1}(Y) \arrow[r, "\partial^{\xi}_{n+1}"] \arrow[d, "\partial^{\eta}_{n+1}"'] & G_n(E) \arrow[d, "\pi_n(f)"] \\ G_n(B) \arrow[r, "incl."] & \pi_n(B) \end{tikzcd}$$

ここで (i) の上列と下列はそれぞれ ξ と η というファイブレーションで、∂_{n+1} はおのおのの n+1 次連結準同型写像。

定理A： もし $f : E \to B$ が G-写像でなければ、(i) の意味での拡張をもたないような 球面上の E-ファイブレーション ξ がある。

実際、ある $x \in G_n(E)$ に対し、$0 \neq \pi_n(f)(x) \notin G_n(B)$ とする。そのときある自明でないファイブレーション $\xi_x : E \to E' \to S^{n+1}$ があって $\pi_{n+1}(S^{n+1})$ の生成元 y に対し $\partial^{\xi_x}_{n+1}(y) = x$ となっている [15, Thorem I.2]。ここで ξ_x は次のように作る。$\pi_n(ev) : \pi_n(aut_1E) \to G_n(E)$ によって x に移る元 $\hat{x}$ を固定する。$\pi_{n+1}(Baut_1E) \cong \pi_n(aut_1E)$ から、$\hat{x} \in \pi_{n+1}(Baut_1E)$、つまり、写像 $S^{n+1} \to Baut_1E$ と思える。この写像によって、普遍ファイブレーションを引き戻して ξ_x を得る。一方、S^{n+1} 上の任意の B-ファイブレーション η に対し、仮定から $G_n(B) \ni \partial^{\eta}_{n+1}(y) \neq \pi_n(f)(x)$。つまり (ii) は可換でなくなる。上のファイバーの拡張問題については以下触れない。G-写像の定義に戻る。

性質（１） B が G-空間なら, 任意の写像 $f : E \to B$ は G-写像。したがって G-写像は G-空間の一般化とも思える。
（２） $f : S^n \to B$ にたいし、f が G-写像であることと $[f] \in G_n(B)$ は同値。
（３） $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ を G-写像とすると、$g \circ f : X \to Z$ も G-写像。
（４） $f \simeq *$ もしくは $E \simeq B \times X$ で $f \simeq \pi_B$ なら f は G-写像。
（５）ファイブレーション $X \to E \to B$ の連結写像 $\partial : \Omega B \to X$ は G-写像 [7]。
（６）２連結空間 E に対し、任意の写像 $f : E \to S^2$ は G-写像である。[16, Theorem 2.1]([11])
（７）ポスト二コフ n-ステージ $p_n : X \to X_n$ は G-写像。[23]

定義 [17] $f : E \to B$ に対し $\pi_n(B)$ の元 $[a]$ が $f : E \to B$ の **n 次評価部分群（n-th evaluation subgroup）** $G_n(B, E; f)$ に入っているとは、

$$\begin{tikzcd} & map(E, B; f) \arrow[d, "ev_f"] \\ S^n \arrow[ur, dotted, "\tilde{F_a}"] \arrow[r, "a"'] & B \end{tikzcd}$$

なるホモトピー可換リフト $\tilde{F_a}$ があるときをいう。ここで $G_n(X) = G_n(X, X; id_X)$ である。[10]（[14]）では関数空間のモデルで議論している。そこにおいて いわゆる相対 G-空間、つまり、$G_*(B, E; f) = \pi_*(B)$ となるためのある条件も調べられている。このホモトピー可換図は随伴によって、

$$\begin{tikzcd} E \times S^n \arrow[dr, dotted, "F_a"'] & E \vee S^n \arrow[l, "incl."'] \arrow[d, "(f|a)"] \\ & B. \end{tikzcd}$$

と思える ([20]) ので f の相対 Gottlieb 群とも言われる。後ほど述べるが、こちらからの議論（model の derivation）は [3], [20],[21] でなされており、計算の利便性もあり講演者はそれに従う。

例: $E = S^2 \times S^5$、$B = \mathbb{C}P^2$ のとき　$G_2(B, E; f) = \mathbb{Z}$ となる写像 $f : E \to B$ がある。

２つの性質「$G_n(B, E; f) \supset G_n(B)$」と「$\pi_n(f) : G_n(E) \to G_n(B, E; f)$」から
補題１ (Gottlieb[8]) : もし $G(B, E; f) = G(B)$ なら f は G-map である。とくに、f が右ホモトピー逆写像をもつ（切断を持つ）なら f は G-写像。

例: 自由ループのファイブレーション $\Omega X \to LX \xrightarrow{f} X$ において f はG-写像。ここで $l : S^1 \to X$ に対し、$f(l) := l(0)$。
自己ホモトピー同値写像は G-写像。
注）$G(B, E; f) = G(B)$ でなくても G-写像でありうる。例えば Hopf 写像 $\eta : S^3 \to S^2$ において $G_n(S^2, S^3; \eta) = \pi_n(S^2)$[21, Ex2.7] だが $G_2(S^2) = 0$。

定義 [32]：$O_n(f) := \mathrm{Im}\ [\ G_n(E) \stackrel{\pi_n(f)}{\to} \pi_n(B) \stackrel{proj.}{\to} \pi_n(B)/G_n(B)\ ]$、$O(f) := \oplus_i O_i(f)$。

このとき、「$O(f) = 0$」と「f はG-写像」は同値であり、　ファイブレーション $X \to E \to B$ において X, E が有限のとき、$G_n(E)_{\mathbb{Q}} = S_n \oplus T_n \oplus U_n$ ただし $U_n := \pi_n(f)_{\mathbb{Q}}(G_n(E)_{\mathbb{Q}}) \subset G_n(B, E; f)_{\mathbb{Q}}$ という分解 [31] があるが、$O_n(f_{\mathbb{Q}}) \cong U_n/(G_n(B)_{\mathbb{Q}} \cap U_n)$ となっている。

命題: 一般に $f : Y \to Z$ $g : X \to Y$ に対し、 $\mathrm{rank}O(f \circ g) \leq \mathrm{rank}O(f) + \mathrm{rank}O(g)$

定義 [32]：　$\mathbf{G}'(E, B) := \{[f] \in [E, B] \mid\ f$ は G-写像 $\}$.

定義 [30]：　$f : E \to B$ が、cyclic 写像とは、

$$\begin{tikzcd} & aut_1B \arrow[d, "ev"] \\ E \arrow[ur, dotted, "\tilde{F}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \text{もしくは} \qquad \begin{tikzcd} E \times B \arrow[dr, dotted, "F"'] & E \vee B \arrow[l, "incl."'] \arrow[d, "(f|id_B)"] \\ & B \end{tikzcd}$$

がホモトピー可換になるような写像 $\tilde{F}$ もしくは F が存在するときをいい、E から B への cyclic 写像の集合を、慣例上、$\mathbf{G}(E, B)$ と書く。

例： Hopf 写像 $\eta : S^3 \to S^2$。Gottlieb 群の元。群が B に作用しているときの軌道写像。

補題 2 [28, Lemma2.1]：　cyclic map は G-map。つまり $\mathbf{G}(E, B) \subset \mathbf{G}'(E, B)$。

この逆はいえない。例えば、$S^{2n} \stackrel{=}{\to} S^{2n}$ は cyclic map でない [19, Theorem 3.2] が、勿論 G-map である。

例 1：$H^*(B; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[w]/(w^{k+1})$ with $|w| = 2n$, とき $\mathbf{G}(E_{\mathbb{Q}}, B_{\mathbb{Q}}) \cong H^{2n(k+1)-1}(E; \mathbb{Q})$ [19, Example 4.4]. であるが、$\mathbf{G}'(E_{\mathbb{Q}}, B_{\mathbb{Q}}) \cong [E_{\mathbb{Q}}, B_{\mathbb{Q}}] \cong A \times H^{2n(k+1)-1}(E; \mathbb{Q})$ となる。ここで $A = \{a \in H^{2n}(E; \mathbb{Q}) | a^{k+1} = 0\}$。

注） 随伴により、$f : E \to B$ が cyclic map なら H-空間 ($= aut_1B$) を経由する。ということが (Hopf の定理により H-空間の有理コホモロジー環は奇数次生成外積代数なので)、有理 cyclic map の特徴付けに大きく貢献している [19] が、G-写像においてはそのような便利なものが (今のところ) 見あたらない。

さて、講演の道具は Sullivan の極小モデル（minimal model） (ある可換微分次数付代数 $\mathbb{Q}$-DGA) [29],[4] とその導分（derivation） のホモロジー [29], [20] であり、それについて簡単に説明する。単連結有限 CW 複体 B のモデル $M(B)$ を $(\Lambda W, d_B)$ と書く。 1ページの (1) のモデルは、DGA ホモトピー可換図：

$$\begin{tikzcd} M(B) \otimes M(S^n) \arrow[r, "p_1 \oplus p_2"] & M(B) \oplus M(S^n) \\ & M(B). \arrow[ul, dotted, "M(F_a)"] \arrow[u, "id \oplus M(a)"'] \end{tikzcd}$$

となる。上の図の点線の $M(F_a)$ は、ΛW の任意の元 w に対し $M(F_a)(w) = w + \sigma(w) \otimes \iota$ (ここで ι は $M(S^n)$ の n 次元生成元) で与えられ、このとき σ は derivation となっている。$M(F_a)$ は DGA-写像であることから、derivation の (次数を 1 つ下げる) 微分を

$$\delta_B(\sigma) := d_B \circ \sigma - (-1)^{|\sigma|} \sigma \circ d_B \qquad \sigma \in Der_n M(B) = Der_n(\Lambda W, d_B)$$

で定義する（$\delta_B \circ \delta_B = 0$）と、$\sigma$ は n 次サイクルになっている。これから derivation のなす DGL $(Der_*(\Lambda W), \delta_B)$ のホモロジー群 $H_n(Der(\Lambda W))$ が導かれ、それを用い n 次有理 Gottlieb 群も定義される [4, p.392-393],[26]。

ファイブレーション $X \stackrel{j}{\to} E \stackrel{f}{\to} B$ のモデルは、KS-拡大 [4, p.198] と呼ばれる（真中は極小とは限らない）モデルの列

$$M(B) = (\Lambda W, d_B) \to (\Lambda W \otimes \Lambda V, D) \to (\Lambda V, \overline{D}) = (\Lambda V, d) = M(X) \quad : \quad D|_{\Lambda W} = d_B$$

で与えられる。これを用いて $f : E \to B$ の評価部分群 $G_*(B, E; f)$ も上と同様して与えられる [20]。もちろん、ファイブレーションが自明 ($E \simeq X \times B$) なら f は G-map だし、$(\Lambda W \otimes \Lambda V, D) \cong M(B) \otimes M(X)$。写像をファイブレーションとしてとらえると、KS 拡大を用いることにより、G-写像の障害などを考える上で便利。

命題 1： $\pi_n(B)_{\mathbb{Q}} = Hom(W^n, \mathbb{Q})$ の部分基底 $\mathcal{W}_n$ で次をみたすものがある:

$$O_n(f)_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q} < w^* \in \mathcal{W}_n \mid\ w^* \text{は次の (i) と (ii) をみたす} >$$

(i) $\delta_E(w^* + \sigma) = 0$ for some $\sigma \in Der_n(\Lambda W \otimes \Lambda V, D)$ with $\sigma(x) = 0$ for any $x^* \in \mathcal{W}_n$

(ii) $\delta_B(w^* + \tau) \neq 0$ for any $\tau \in Der_n(\Lambda W, d_B)$ with $\tau(w) = 0$。

記号:　$v \in W$ と $h \in \Lambda W$ に対し、(v, h) を元 v を元 h に移し v 以外の元は零に移す（基本）derivation とする [29], [26]。任意の derivation は、この基本 derivation の一次結合で $\sum_i (v_i, h_i)$ のように表せる。とくに $w^* = (w, 1)$。

例２：奇数次球面ファイブレーション $S^m \to E \xrightarrow{f} B$ で、$M(S^m) = (\Lambda(v), 0)$、$M(B) = (\Lambda(w_1, w_2, \cdots, w_{2n}, u), d_B)$ $(n > 1)$ (全ての元の次数は奇数)、$d_B u = w_1 w_2 \cdots w_{2n}$ そして $Dv = w_1 w_2$ としたとき、$\delta_E(w_i, 1)(u) = D(w_i, 1)(u) + (w_i, 1)D(u) = (w_i, 1)Du = (w_i, 1)(w_1 \cdots w_{2n}) = (-1)^{i-1} w_1 w_2 \cdots \overset{\vee}{w_i} \cdots w_{2n}$. となる。よって $i = 3, \cdots, 2n$ において

(i) $\delta_E((w_i, 1) + (-1)^i (u, v w_3 \cdots \overset{\vee}{w_i} \cdots w_{2n})) = 0$

(ii) $\delta_B((w_i, 1) + \tau) = (u, (-1)^{i-1} w_1 w_2 \cdots \overset{\vee}{w_i} \cdots w_{2n}) + \tau \neq 0 \quad (any\ \tau)$

ゆえ、命題 1 より、$O(f) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q} < w_3^*, \cdots, w_{2n}^* > (\neq 0)$ となり、f は G-写像でなく、rank$O(f) = 2n - 2$。このとき $E_{\mathbb{Q}} \simeq S_{\mathbb{Q}}^{|w_3|} \times ... \times S_{\mathbb{Q}}^{|w_{2n}|} \times E'_{\mathbb{Q}}$ なる有理分解がある。

定義 [4]：有理ホモトピー群が有限、有理コホロジー群が有限で偶数次生成な単連結空間を F_0-空間という。
Halperin の予想：「X が F_0-空間なら、任意のファイブレーション $X \to E \to B$ は c-split する（加法的に $H^*(E; \mathbb{Q}) \cong H^*(X; \mathbb{Q}) \otimes H^*(B; \mathbb{Q})$）」 [4, p.516]. これは X が等質空間の場合 [27] など、様々な場合で肯定的である [5]。

補題 1 より、

定理 B： E、B を単連結有限ＣＷ複体とする。写像 $f : E \to B$ において $H^*(f; \mathbb{Q})$ が単射 なら、f は有理 G-写像、つまり、$\pi(f_{\mathbb{Q}})G(E_{\mathbb{Q}}) \subset G(B_{\mathbb{Q}})$。

問: X が F_0-空間なら（Halperin 予想に関係なく）f は有理 G-写像か？　写像はどのようなホモトピーファイバーを持つとき G-写像か？

例３：$M(X) = (\Lambda(x, y, v_1, v_2, v_3), d)$ $|x| = |y| = 2$, $|v_i| = 3$, $dx = dy = 0$, $dv_1 = x^2$, $dv_2 = xy$, $dv_3 = y^2$ とする。このとき、X は F_0-空間でないが X をホモトピーファイバーとする任意の写像 $f : E \to B$ は G-写像になる。実際、$D \circ D = 0$ から $Dx = Dy = 0$ となり、次数から $Dv_i = a_i x + b_i y + c_i$ ただし $a_i, b_i, c_i \in M(B)$　とおける。上の命題 1 より、任意の $\Lambda W \otimes \Lambda^+ V$ の元 α に対し $D(\alpha) \notin \Lambda W - \{0\}$ を示せればよい。したがって、特に d-コサイクルの D による像を調べればよいが、$H^+(X; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} < x, y, xv_2 - yv_1, xv_3 - yv_2, xyv_2 - y^2 v_1 >$ であり、$D(xv_2 - yv_1), D(xv_3 - yv_2), D(xyv_2 - y^2 v_1) \in \Lambda W \otimes \Lambda^+ V$ であるので示せた。

注: 分類写像 $h : B \to Baut_1 X$ の $\pi_*(h)_{\mathbb{Q}}$ の情報だけからは有理 G-写像かどうかはわからない。

問: Whitehead 群 $W_n(X)$、Whitehead 空間 [28]（[23]）に対し、 Whitehead-写像 (または高次 Whitehead 写像) も自然に定義した上で、「H-空間 $\Rightarrow$ G-空間 $\Rightarrow$ W-空間 」　の写像版：

$$\text{cyclic 写像} \Rightarrow \text{Gottileb 写像} \Rightarrow \text{Whitehead 写像}$$

の矢印のギャップ等をとりあえず有理モデルで考察せよ。

定義 [33]: Z を弧状連結な基点付き CW 複体、$Z(n)$ を Z の n 次ガネア空間とする。$n > 0$ に対して Z の m-(n)-Gottlieb 群 $G_m^{(n)}(Z)$ とは、$(a|id_{Z(n)}) : S^m \vee Z(n) \to Z$ に対しある写像 $F(n) : (S^m \times Z)(n) \to Z$ （提携写像もどき）があって、ホモトピー可換図：

$$\begin{tikzcd}
(Z \times S^m)(n) \arrow[dr, dotted, "F(n)"] & S^m(n) \arrow[l, "i_{S^m(n)}"'] \arrow[d, "a \circ p_n^{S^m}"] & S^m \arrow[l, "s"'] \arrow[dl, bend left, "a"] \\
Z(n) \arrow[u, "i_{Z(n)}"] \arrow[r, "p_n^Z"'] & Z, &
\end{tikzcd}$$

を満たすような $[a] \in [S^m, Z] = \pi_m(Z)$ の部分群をいう。これは $(X \times S^m)(n) \simeq X(n) \cup X(n-1) \times S^m(1)$　[12] により $G_m(Z, Z(n); p_n^Z)$ と同型。ここで s は $cat(S^m) = 1$ ゆえ存在する切断。$\pi_m(Z) \supset G_m^{(1)}(Z) \supset \cdots \supset G_m^{(n)}(Z) \supset G_m^{(n+1)}(Z) \supset \cdots \supset G_m(Z)$　なる包含列があり、$cat(Z) < n$ のとき $G_m^{(n)}(Z) = G_m(Z)$。

問:　とりあえず有理モデルで G-写像と G(n)-写像の関係を明らかにせよ。（一般には必要でも十分でもないことを示す有理モデルでの例が作れる）

参考文献

[1] M.Arkowitz, G.Lupton and A.Murillo, *Subgroups of the group of self-homotopy equivalences*, Contem.Math.**274** (2001) 21-32

[2] R.Bott and L.W.Tu, *Differential forms in algebraic topolgy*, Springer GTM **82**

[3] Y.Félix and S.Halperin, *Rational LS category and its application*, Trans.AMS **273** (1982) 1-37

[4] Y.Félix, S.Halperin and J.C.Thomas, *Rational homotopy theory*, Springer G.T.M. **205** [2001].

[5] Y.Félix, J.Oprea and D.Tanré, *Algebraic Models in Geometry*, [2008] Oxford GTM **17**

[6] M.Golasiński and J.Mukai, *Gottlieb groups of spheres*, Topology **47** (2008) 399-430

[7] D.H.Gottlieb, *On fibre spaces and the evaluation maps*, Ann. Math. **87** (1968) 42-55

[8] D.H.Gottlieb, *Evaluation subgroups of homotopy groups*, Amer.J. Math. **91** (1969) 729-756

[9] S.Halperin, *Rational homotopy and tours actions*, London Math.Soc.L.N. **93**(1985) 1-20

[10] Y.Hirato, K,Kuribayashi and N.Oda, *A function space model approach to the rational evaluation subgroups*, Math.Z. **258** (2008), no. 3, 521-555

[11] 井上明 「２次元球面の Gottlieb 群」数理解析研究所講究録 **1290** (2002) 25-27

[12] N.Iwase, *Ganea's conjecture on Lusternik-Schnirelmann category*, Bull. London Math. Soc. **30** (1998) 623-634

[13] J.-R.Kim, N.Oda, J.Pan and M.H.Woo, *Gottlieb groups and subgroups of the group of self-homotopy equivalences*, J.Korean Math. Soc. **43** (2006) 1047-1063

[14] 栗林勝彦 「評価写像の代数的モデルとその有理 Gottlieb 群への応用」 http://marine.shinshu-u.ac.jp/kuri/surveys.html

[15] G.E.Lang,Jr., *Evaluation subgroups of factor spaces*, Pacific J.Math. **42** (1972) 701-709

[16] K.-Y.Lee, M.Mimura and M.H.Woo, *Gottlieb groups of homogeneous spaces*, Topology and its Applications **145** (2004) 147-155

[17] K.-Y.Lee and M.H.Woo, *The G-sequence and ω-homology of a CW-pair*, Topology and its Applications **52** (3) (1993) 221-236

[18] G.Lupton and J.Oprea, *Cohomologically symplectic spaces: toral actions and the Gottlieb group*, T.A.M.S. **347** (1995) 261-288

[19] G.Lupton and S.B.Smith, *Cyclic maps in rational homotopy theory*, Math.Z. **249** (2005) 113-124

[20] G.Lupton and S.B.Smith, *Rationalized evaluation subgroups of a map I: Sullivan models, derivations and G-sequences,* J.Pure Appl.Alg. **209** (2007) 159-171

[21] G.Lupton and S.B.Smith, *The evaluation subgroup of a fibre inclusion*, Topology and its Applications **154** (2007) 1107-1118

[22] W.Meier, *Rational universal fibrations and flag manifolds*, Math.Ann. **258** (1981/82) 329-340

[23] 三村護 「ホップ空間」 紀伊国屋書店

[24] J.Oprea, *Decomposition theorems in rational homotopy theory*, Proc.A.M.S. **96** (1986) 505-512

[25] J.Oprea, *Gottlieb groups, group actions, fixed points and rational homotopy*, Lecture note of Seoul National University **29** (1995)

[26] P.Salvatore, *Rational nilpotency of self-equivalences*, Topology and its Applications **77** (1997) 37-50

[27] H.Shiga and M.Tezuka, *Rational fibrations, homogeneous spaces with Positive Euler characteristic and Jacobians*, Ann.Inst.Fourier **37** (1987) 81-106

[28] J.Siegel, *G-spaces, H-spaces and W-spaces*, Pacific J. of Math. **31** (1969) 209-214

[29] D.Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Publ. IHES **47** (1978) 269-331

[30] K.Varadarajian, *Generalised Gottlieb groups*, J.Indian Math.Soc. **33** (1969) 141-164

[31] T.Yamaguchi, *An estimate in Gottlieb ranks of fibration*, to appear in Bull. Belg. Math. Soc. (2008)

[32] T.Yamaguchi, *Gottlieb maps in rational homotopy*, preprint

[33] T.Yamaguchi, *(n)-pairing with axes in rational homotopy*, preprint