微分空間と位相空間

原口　忠之

X, Y を位相空間とするとき、X から Y への連続写像の集合 $\mathrm{map}(X, Y)$ にコンパクト開位相を導入し、これを写像空間とよぶ。X, Y, Z を位相空間とするとき、$\mathrm{map}(X \times Y, Z)$ と $\mathrm{map}(X, \mathrm{map}(Y, Z))$ は必ずしも同相ではない。このとき X, Y, Z になんの条件も課さずに $\mathrm{map}(X \times Y, Z)$ と $\mathrm{map}(X, \mathrm{map}(Y, Z))$ が同相になるような位相はないのか、という疑問が本研究を始めるきっかけである。

ここでは位相空間の代わりに微分空間という概念を用いることにより、このような疑問が解決されることを示す。微分空間と位相空間は異なる概念であるが、似たような性質を持ち、微分空間から位相空間を導入することができ、逆に位相空間から微分空間を導入することもできる。さらに、微分空間においても位相空間と同様に基本群などのホモとピー不変量を定めることができる。

1　微分空間を次のように定義する。X を集合とし、D を任意のユークリッド空間の任意の開集合から X への写像からなる集合とする。D が、次の３つの条件を満たすとき D を X の微分構造 (diffeology) とよび、(X, D) を微分空間 (diffeological space) とよぶ。さらに D の元をプロットとよぶ。ここではユークリッド空間の開集合のことを開領域とよぶことにする。

D1　任意の $x_\circ \in X$ と任意の自然数 n に対して、R^n から X への $x_\circ$ にうつる定値写像を $C_{x_\circ}$ とすると $C_{x_\circ}$ は X のプロットである。

D2　任意の開領域から X への写像を $P : U \longrightarrow X$ とする。任意の $r \in U$ に対して、r を含む U のある開領域 V が存在して、$P\mid_V : V \longrightarrow X$ が X のプロットになるならば、P は X のプロットである。

D3　X の任意のプロットを $P : U \longrightarrow X$ とし、任意の無限回微分可能写像を $Q : W \longrightarrow U$ とする。（ただし W は任意の開領域とする。）このとき P と Q の合成写像 $P \circ Q : W \longrightarrow X$ は X のプロットである。

2　微分空間の例をあげる。U を任意の開領域とする。このとき U に自然に定まる微分構造が存在する。$C^\infty_*(U)$ を次のように定めると、微分構造の公理をみたす。任意の開領域から U への無限回微分可能写像全体からなる集合を $C^\infty_*(U)$ と定める。この微分構造 $C^\infty_*(U)$ を標準微分構造とよび $(U, C^\infty_*(U))$ を標準微分空間とよぶ。今後は任意の開領域にはこの標準微分構造が導入されているとする。

3　X を集合とする。D と D$'$ を X の微分構造とする。D が D$'$ より弱いとは、$\mathrm{D}' \subset \mathrm{D}$ のときをいう。D が D$'$ より強いとは、$\mathrm{D} \subset \mathrm{D}'$ のときをいう。ここで注意することは、微分構造が強いとき、集合としてはより小さいということである。例として、微分空間にも離散位相や密着位相に相当するものが存在する。微分空間 X における最も強い微分構造を離散微分構造とよび $\mathrm{D}_\circ(X)$ と表す。具体的には次が成り立つ。

$$\mathrm{D}_\circ(X) = \{ P : U \longrightarrow X \mid \forall r \in U \ , \ r \in \exists V : U \text{ の開領域 } \ s.t \ P|_V : \text{定置写像} \}$$

微分空間 X における最も弱い微分構造を密着微分構造とよび $\mathrm{D}_\bullet(X)$ と表す。$\mathrm{D}_\bullet(X)$ は任意の開領域から X への写像全体からなる集合を $\mathrm{D}_\bullet(X)$ と表す。このとき、$\mathrm{D}_\circ(X) \subset \mathrm{D}_\bullet(X)$ であることに注意する。

4　X を微分空間とするとき、X の部分集合に自然に微分空間の構造が入り、微分空間の直積にも微分空間の構造が入る。

5　(X, D) と (X', D') を微分空間とする。$f : X \longrightarrow X'$ が滑らかな写像であるとは、X の任意のプロット $P : U \longrightarrow X$ に対して、$f \circ P : U \longrightarrow X'$ が X' のプロットになるときをいう。

6　(X, D) と (X', D') を微分空間とする。$f : X \longrightarrow X'$ が微分同相写像であるとは、f が全単射で滑らかな写像であり、f の逆写像が滑らかな写像となるときをいう。

7　(X, D) と (X', D') を微分空間とする。X から X' への滑らかな写像全体からなる集合を $C^\infty(X, X')$ で表す。$C^\infty(X, X')$ に次のように、微分構造を導入する。写像 $ev : X \times C^\infty(X, X') \longrightarrow X'$を、$ev(x, f) = f(x)$ で定めるとき、ev が滑らかな写像になるような $C^\infty(X, X')$ の最も弱い微分構造を微分写像構造とよび、この微分構造から定まる微分空間 $C^\infty(X, X')$ を微分写像空間とよぶ。

8　主定理１　X, X', X'' を微分空間とする。このとき $C^\infty(X, C^\infty(X', X''))$ と $C^\infty(X \times X', X'')$ は微分同相となる。

このとき微分空間 X, X', X'' には何の条件も仮定しないで成り立つということに注意する。

9　微分空間から位相空間の導入を次のように定める。(X, D) を微分空間とする。$X \supset A$ が、$\mathrm{D}-$ 開集合であるとは、X の任意のプロット $P : U \longrightarrow X$ に対して、$P^{-1}(A)$ が U の開領域になることとする。

このとき、$\mathrm{D}-$ 開集合の族 $\mathcal{T}(\mathrm{D})$ は位相の公理をみたす。$\mathcal{T}(\mathrm{D})$ を $\mathrm{D}-$ 位相とよび、$(X, \mathcal{T}(\mathrm{D}))$ を $\mathcal{T}X$ とかく。

10　位相空間から微分空間の導入を次のように定める。

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。$\mathrm{D}(\mathcal{O})$ を任意の次元のユークリッド空間の開集合から X へのすべての連続写像からなる集合とする。このとき、$\mathrm{D}(\mathcal{O})$ は微分構造の公理をみたす。この $\mathrm{D}(\mathcal{O})$ を $\mathcal{O}-$ 微分構造とよび、$(X, \mathrm{D}(\mathcal{O}))$ を $\mathrm{D}X$ とあらわす。

9 と 10 から、位相空間から微分空間を導入できて、さらにその微分空間から位相空間を導入することができるが、最初に与えられた位相空間と導入しなおされた位相空間は同相になるとは限らない。では X がどのような条件を満たせば、それが成り立つのか、という疑問の１つの答えが、次の主定理２で与えられる。

11　主定理２　$(X, \mathcal{O})$ を CW 複体とする。このとき $(X, \mathcal{T}\mathrm{D}(\mathcal{O}))$ は、$(X, \mathcal{O})$ と同相である。

次に写像空間と写像微分空間の関係に関する考察をのべる。

12　X と X' を位相空間とする。$\mathrm{smap}(X, Y)$ を次のように定める。任意の標準単体 $\triangle^n$ から X への連続写像と X から Y への写像の合成が連続写像となるような X から Y へのすべての写像からなる集合を $\mathrm{smap}(X, Y)$ とする。つまり、

$$\mathrm{smap}(X, Y) = \{ f : X \longrightarrow Y \mid \forall \sigma : \triangle^n \longrightarrow X : \text{連続} \ , \ f \circ \sigma : \triangle^n \longrightarrow Y : \text{連続} \}$$

とかける。$\mathrm{smap}(X, Y)$ に次のようにして位相を定める。任意の標準単体から X への連続写像を $\sigma : \triangle^n \longrightarrow X$ とする。$\sigma^* : \mathrm{smap}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{map}(\triangle^n, Y)$ を任意の $f : X \longrightarrow Y \in \mathrm{smap}(X, Y)$ に対して、$\sigma^*(f) = f \circ \sigma$ と定める。ただし、$\mathrm{map}(\triangle^n, Y)$ は $\triangle^n$ から Y への連続写像からなる集合とし、コンパクト開位相が導入されているとする。このとき、σ^* が連続写像になるようなもっとも弱い位相を $\mathrm{smap}(X, Y)$ に定める。この位相を $\mathcal{O}_{\mathrm{smap}}$ とかく。

13　任意の標準単体から X への連続写像を $\sigma : \triangle^n \longrightarrow X$ とする。

$$\mathrm{W}(\sigma, L, U) = \{ f : X \longrightarrow Y \mid f \circ \sigma(L) \subset U \}$$

と定めて、

$$\{ \mathrm{W}(\sigma, L, U) \mid \sigma : \triangle^n \longrightarrow X : \text{連続} \ , \ L : \triangle^n \text{のコンパクト} \ , \ U : Y \text{ の開集合} \}$$

を準基として定まる位相 $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}_{\mathrm{smap}}$ は等しくなる。

14　主定理３ $(X,\mathcal{O}_X)$ と $(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする。$\mathcal{O}_X$ と $\mathcal{O}_Y$ から誘導される $\mathcal{T}-$ 微分空間である $(X,\mathrm{D}(\mathcal{O}_X)) = \mathrm{D}X$ と $(Y,\mathrm{D}(\mathcal{O}_Y) = \mathrm{D}Y$ において $(C^\infty(\mathrm{D}X,\mathrm{D}Y),\mathcal{D})$ を微分写像空間とする。位相空間 $(\mathrm{smap}(X,Y),\mathcal{O}_{\mathrm{smap}})$ から誘導される $\mathcal{T}-$ 微分空間を $(\mathrm{smap}(X,Y),\mathrm{D}(\mathcal{O}_{\mathrm{smap}}))$ とする。このとき、$(C^\infty(\mathrm{D}X,\mathrm{D}Y),\mathcal{D})$ と $(\mathrm{smap}(X,Y),\mathrm{D}(\mathcal{O}_{\mathrm{smap}}))$ は微分同相である。

時間があれば、微分空間に対するホモとピー群あるいは (コ) ホモロジー群についても紹介したい。

参考文献

[1] Patrick Iglesias-Zemmour,Diffeology, Typeset July 9, 2008

[2] K. Shimakawa, K.yoshida,Numerical continuity and cartesian closedness