de Rham homotopy theory for non-simply connected spaces

森谷　駿二

京都大学　理学研究科

Sullivan の 空間の rationalization [1] の non-nilpotent な情報を含むような類似物として、Bousfield, Kan の fiberwise rationalization [2] がありましたが，最近では Toën の schematization [3, 4] と Pridham の pro-algebraic homotopy type [5] が提唱されています．rationalization が $\mathbb{Q}$-係数ホモロジー同型に関する局所化であるのに対して，これらは"全ての finite rank $\mathbb{Q}$-local system 係数のコホモロジーで同型を誘導する写像に関する局所化"と考えられます。(実際には schematization (schematic homotopy type) は higher stack として，pro-algebraic homotopy type は simplicial affine group scheme として実現されます．また，これらは同値であることが知られています．)

一方，de Rham algebra $A_{dR}(M)$ の類似物で non-nilpotent な情報を含みそうなものとして，flat bundle のなす dg-category $T_{dR}(M)$ が考えられます．これは C^∞-多様体 M に対して，

- 対象は M 上の finte rank flat bundle たち
- 射のなす complex は hom flat bundle 係数の de Rham complex

によって定まる dg-category です．また，$A_{dR}(M)$ のもう一つの類似物として，$O(\pi_1^{red})$-係数の de Rham algebra $A_{dR}(M, O(\pi_1^{red}))$ があります．ここで，π_1^{red} は M の基本群の pro-reductive completion で $O(\pi_1^{red})$ はその関数環を left translation で M 上の flat bundle と見なしたものです．$A_{dR}(M, O(\pi_1^{red}))$ は π_1-equivariant dg-algebra の構造を持ちます．$T_{dR}(M)$, $A_{dR}(M, O(\pi_1^{red}))$ は多様体に対してしか定義できませんが，polynomial differential form と flat bundle の代わりに $\mathbb{Q}$-local system を使うことによって一般の simplicial set に対して $\mathbb{Q}$ 上で対応物を定義することができます．この講演では，

- $T_{dR}(M)$ と $A_{dR}(M, O(\pi_1^{red}))$ が互いを復元すること．(ただし，一般にはこれは空間の射に関して自然な対応ではない)

- この対応を使うと $A_{dR}(M, O(\pi_1^{red}))$ の minimal model が元の (nilpotent とは限らない) 空間 M の代数トポロジーの情報 (有理ホモトピー群, Postnikov tower の k-invariant , 基本群の有理ホモトピー群への作用) をどのように encode しているかがわかること.

- schematic homotopy type たちのなす圏とある種の構造 (closed tensor structure) を持った dg-category たちのなすホモトピー圏 (の部分圏) の同値, 構成 $M \mapsto T_{dR}(M)$ が schematization と同値であること.

についてはなせるところまで話します. これらの結果のうち基本群が有限群の場合については [6] に書いてあります.

参考文献

[1] D. Sullivan, Geometric topology. Part I; Localization, periodicity, and Galois symmetry, Rivised version, M.I.T. Press, Cambridge, 1970.

[2] A. K. Bousfield, D. M. Kan, Homotopy limits, completions and localizations, Lecture Notes in Mathematics, 304, Springer-Verlag, 1972.

[3] B. Toën, Champs affines, Selecta Math. (N.S.), 12, no.1, (2006) 39-135.

[4] L. Katzarkov, T. Pantev, B. Toën, Algebraic and topological aspects of the schmematization functor, preprint, arXiv:0503418.

[5] J. P. Pridham, Pro-algebraic homotopy types, Proc. Lond. Math. Soc. (3), 97, no.2, (2008) 273-338.

[6] S. Moriya, Rational Homotopy Theory and Differential Graded Category, arXiv:0810.0808.