Derived categories and topological methods in combinatorial commutative algebra

柳川 浩二 (関西大学システム理工学部)

有限単体的複体や凸多面体の組合せ論には, 可換環論の手法がしばしば有効で, **組合せ論的可換代数**と呼ばれる研究領域が成立している ([2, 3]). とくに、多項式環を被約な単項式イデアルで割って得られる剰余環は, Stanley-Reisner 環と呼ばれ, まことに素朴なものながら, この理論の基本的な題材である.

以下, k を体, $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ を多項式環とする.

定義 1. $[n] := \{1, \ldots, n\}$ とし, $\Delta \subset 2^{[n]}$ を, $[n]$ を頂点集合とする抽象単体的複体とする. 単項式の集合 $\{\prod_{i \in F} x_i \mid F \subset [n], F \not\in \Delta\}$ が生成する S のイデアルを I_Δ としたとき, 剰余環 $k[\Delta] := S/I_\Delta$ を Δ の **Stanley-Reisner 環**と言う.

興味深いのは, $k[\Delta]$ の環論的性質が, Δ の幾何学的実現 $|\Delta|$ の位相的な性質を様々に反映することである (ただし, ホモトピー論的性質とは相性が悪い).

$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して, S の単項式 $\prod x_i^{a_i}$ を $x^{\mathbf{a}}$ と記す. $S = \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} k\, x^{\mathbf{a}}$ により, S を $\mathbb{N}^n$-次数付環とみなし, 有限生成 $\mathbb{Z}^n$-次数付 S-加群のなす圏を ${}^*\mathrm{mod}\, S$ と記す. $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ の各成分 a_i が全て 0 か 1 のとき, $\mathbf{a}$ を squarefree と言う. squarefree なベクトル $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ と集合 $\{i \in [n] \mid a_i = 1\}$ を同一視する. この convention で, $F \subset [n]$ に対して, 生成元が F-次であるような階数 1 の自由加群を $S(-F)$ と記す.

定義 2. $M \in {}^*\mathrm{mod}\, S$ が **squarefree** とは, 以下の表示を持つことである.

$$\bigoplus_{F \subset [n]} S(-F)^{m_F} \to \bigoplus_{F \subset [n]} S(-F)^{n_F} \to M \to 0 \qquad (\exists m_F, \exists n_F \in \mathbb{N})$$

Stanley-Reisner 環自身や, その理論に現れる加群の多くは, S-加群として squarefree である. squarefree 加群からなる ${}^*\mathrm{mod}\, S$ の充満部分圏を $\mathrm{Sq}\, S$ と記す. $\mathrm{Sq}\, S$ は十分多くの射影的対象と入射的対象を持つアーベル圏である. 実は, ある大域次元有限のアルティン k-代数上の有限生成左加群のなす圏と圏同値であり, 扱いやすい. $D^b(\mathrm{Sq}\, S)$ を $\mathrm{Sq}\, S$ の有界な導来圏とする.

$\omega_S := S(-[n])$ を S の**標準加群**と呼ぶ. ω_S 自身も squarefree であるが, $M \in \mathrm{Sq}\, S$ に対し, $\mathrm{Ext}^i_S(M, \omega_S) \in \mathrm{Sq}\, S$ となるので, $\mathbf{D}(-) := \mathrm{RHom}_S(-, \omega_S)$ は $D^b(\mathrm{Sq}\, S)$ から自身への反変関手を与える. また, $\mathbf{D} \circ \mathbf{D} \cong \mathrm{Id}$ である.

$\Delta \subset 2^{[n]}$ を単体的複体とする.

$$\Delta^\vee := \{F \mid F \subset [n],\ [n] - F \not\in \Delta\}$$

とおくと, これは再び単体的複体となり, $(\Delta^\vee)^\vee = \Delta$ を満たす. $\Delta^\vee$ は, Δ の **Alexander 双対**と呼ばる ([2] 参照). この操作は, $\mathrm{Sq}\, S$ から自身への完全な反変関手 $\mathbf{A}$ に拡張される. $\mathbf{A}(k[\Delta]) \cong I_{\Delta^\vee}$ であり, $\mathbf{A} \circ \mathbf{A} \cong \mathrm{Id}$ である. $\mathbf{A}$ は完全なので, $D^b(\mathrm{Sq}\, S)$ から自身への反変関手とみなせる. $D^b(\mathrm{Sq}\, S)$ には, $\mathbf{D}$ と $\mathbf{A}$ の 2 つの「双対性」が存在することになるが, 次が成立している.

定理 3 ([6])**.** $D^b(\mathrm{Sq}\, S)$ から自身への関手として, 以下が成立.

$$(\mathbf{A} \circ \mathbf{D})^3 \cong \mathbf{T}^n.$$

ここで, $\mathbf{T}$ は translation functor (鎖複体の次数のずらし) とする.

例 4. $F \subset [n]$ に対し, $k[F] := S/(x_i \mid i \notin F)$ と置き, $k[F]$ の標準加群 (S-加群としては $k[F]$ そのもので, 生成元の次数を F としたもの) を ω_F と記す. なお, 自由加群 $S(-F)$ が $\mathrm{Sq}\,S$ の射影的対象, $k[F]$ が入射的対象, ω_F が単純な対象 (simple object) である. $d = \#F$ とし, $F^{\mathsf{c}} := [n] - F$ とすると次が成立.

$$S(-F) \overset{\mathbf{D}}{\mapsto} S(-F^{\mathsf{c}}) \overset{\mathbf{A}}{\mapsto} k[F] \overset{\mathbf{D}}{\mapsto} \mathbf{T}^{d-n}(\omega_F) \overset{\mathbf{A}}{\mapsto} \mathbf{T}^{n-d}(\omega_{F^{\mathsf{c}}}) \overset{\mathbf{D}}{\mapsto} \mathbf{T}^{-n}(k[F^{\mathsf{c}}]) \overset{\mathbf{A}}{\mapsto} \mathbf{T}^{n}(S(-F)).$$

上の例が示すように, $\mathbf{A} \circ \mathbf{D}$ を 3 回重ねて, 初めて (次数のずれを除いて) 元に戻る. なお, $\mathbf{A} \circ \mathbf{D}$ は Serre 関手なので, 定理 3 は, $D^b(\mathrm{Sq}\,S)$ が **(3/n)-Calabi-Yau 圏**であることを意味している.

B を (冪集合 $2^{[n]}$ の「幾何学的実現」としての) $n-1$ 単体とする. もちろん, B は $n-1$ 次元の閉球と同相である. $M \in \mathrm{Sq}\,S$ から, B 上の k-係数の構成可能層 M^+ を作ることが出来る. 例えば, 単体的複体 $\Delta \subset 2^{[n]}$ に対し, Stanley-Reisner 環 $k[\Delta]$ の層化 $k[\Delta]^+$ は, $|\Delta| \subset B$ 上の定数層 $\underline{k}_{|\Delta|}$ (の B への拡張) である.

$\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ を S の極大イデアル, $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ を $\mathfrak{m}$ を台とする局所コホモロジーとする (加群の局所コホモロジーは, 現代の可換代数で広く用いられる道具). M が $\mathbb{Z}^n$-次数付加群ならば $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ もそうであるが, 次が成立.

定理 5 ([5])**.** $M \in \mathrm{Sq}\,S$ ならば, 次が成立する.

$$H^i(B, M^+) \cong H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M)_0 \quad (\forall i \geq 1)$$

$$0 \to H^0_{\mathfrak{m}}(M)_0 \to M_0 \to H^0(B, M^+) \to H^1_{\mathfrak{m}}(M)_0 \to 0 \quad (\text{完全}).$$

ここで, $H^i(B, M^+)$ は層のコホモロジー, $(-)_0$ は次数付加群の 0 次部分を表す. $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ の 0 次以外の成分も, M^+ を適当な開集合に制限したもののコンパクト台コホモロジーを用いて記述できる.

$M = k[\Delta]$ のとき, 定理 5 は, 当該分野の基本的な結果である **Hochster の公式**に一致する. ただし, そこでは, 「まつわり複体 (link complex)」等を用いて, 完全に組合せ論的に記述されており, コンパクト台コホモロジーは表に出てこない.

また, $(\omega_S)^+$ は B の内点上の定数層の B への拡張であるが, これは B の**向きの層 (orientation sheaf)** と一致する. このことより, (複体の次数を適当にずらせば) $\mathbf{D}$ は, 層の **Poincaré-Verdier 双対性**に対応している. 特に, $\mathbf{D}(k[\Delta])$ は, $|\Delta|$ 上の層の複体と思えるが, これは $|\Delta|$ の k-係数の **Verdier 双対化複体**と, 複体の次数のずれを除いて擬同型となる.

ここまでの話とは趣が変わるが, 時間に余裕が有れば, 2 回目の講演の途中からは, R. Forman の**離散モース理論**を組合せ論的可換代数に応用する V. Welker らの仕事 ([1]) を紹介させて頂く. S の単項式イデアル I の極小 (or 極小に近い) 自由分解を組合せ論的に記述することは, 可換代数ではポピュラーな問題である. I には, **Taylor 分解**と呼ばれる, 単純だが極小とは程遠い自由分解が常に存在するので, ここから無駄を潰していく作戦が当然考えられる. I が r 個の元で生成されるとき, その Taylor 分解は, $(r-1)$-単体の類似物と思える. 標語的に言えば, 離散モース理論を用いて, 「I の自由分解を与える」という条件を保ったまま, より小さい可縮な CW 複体を構成するのである.

[1] は理論的には強力で, 当該分野では著名だが, 具体例に適用しても, スッキリした結果を得にくい傾向がある. 最近, 大阪大学の岡崎亮太氏と共同で, 組合せ論的可

換代数で重要なクラスである, Borel fixed (monomial) ideal や, その squarefree 版に関して, [1] の手法に則った極小自由分解を構成した. ダミーの変数を入れて, 組合せ論的な操作の自由度をあえて下げることで, 見通しを良くする方針がキーとなっている. なお, Borel fixed ideal の極小自由分解の記述 (の一つ) は, Eliahou と Kervaire によって, 1990 年に既に得られていたが, [1] の論法との関連が不明であった.

References

[1] E. Batzies and V. Welker, Discrete Morse theory for cellular resolutions, J. Reine Angew. Math. **543** (2002), 147–168.

[2] E. Miller and B. Sturmfels, Combinatorial Commutative Algebra, Grad. Texts in Math., Vol. 227, Springer, 2005.

[3] R. Stanley, Combinatorics and commutative algebra, 2nd ed. Birkhäuser, 1996.

[4] K. Yanagawa, Alexander duality for Stanley-Reisner rings and squarefree $\mathbb{N}^n$-graded modules, *J. Algebra* 225 (2000), 630–645.

[5] K. Yanagawa, Stanley-Reisner rings, sheaves, and Poincaré-Verdier duality, *Mathematical Research Letters* 10 (2003) 635–650.

[6] K. Yanagawa, Derived category of squarefree modules and local cohomology with monomial ideal support, *J. Math. Soc. Japan* 56 (2004) 289–308.