Box brackets について

小田信行 （福岡大学理学部）

Toda [5] により，(classical) Toda bracket $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ が導入されているが，その後 Toda により得られた様々な公式など，Toda bracket に関する基本事項が本 [6] の主に 1 章から 3 章において統一的に記述されている．これらの Toda bracket 性質は，球面のホモトピー群の（2 成分の）決定に応用されている．

一般のカテゴリーで classical Toda bracket を含む様々なタイプの 2 次結合を研究し，Toda の本 [6] で得られた公式等を導く試みがなされている（例えば，論文 [1] とその References 参照）．

論文 [2] では box bracket $\square\square\begin{pmatrix} W \xrightarrow{w} C \xrightarrow{g} B \\ h\downarrow \quad \downarrow f \quad \downarrow b \\ U \xrightarrow[u]{} A \xrightarrow[a]{} X \end{pmatrix}$ を定義してその様々な性質を調べ，球面のホモトピー群においていくつかの場合に具体的に計算も行っている．ただし，実際に様々な box bracket の決定を試みると，球面のホモトピー群の 2 成分においては，ほとんどの場合 indeterminacy を完全に決定するのは困難であることが分る．box bracket は，特別な場合として， Toda bracket $\{a, f, w\}$ 等や matrix Toda brackets $\left\{a\,,\ \begin{matrix} f \\ u \end{matrix}\,,\ \begin{matrix} w \\ h \end{matrix}\right\}$ や $\left\{\begin{matrix} b \\ a \end{matrix}\,,\ \begin{matrix} g \\ f \end{matrix}\,,\ w\right\}$ を含む.

また，2-sided matrix Toda bracket $\left\{s\,,\ \begin{matrix} b \\ a \end{matrix}\,,\ \begin{matrix} g \\ f \end{matrix}\,,\ w\right\}$ が論文 [3] で定義され，基本的な性質が調べられている． 論文 [4] では， 2-sided matrix Toda bracket の性質から導かれる Toda bracket の間の新しい関係式や box bracket と 2-sided matrix Toda bracket の間の関係を与える公式が得られている．

ここでは，H. J. Marcum との共著論文 [4] などで得られた box bracket に関する結果のうち，主に 2-category における結果についてお話しする．

参考文献

[1] K.A. Hardie, K.H. Kamps and H.J. Marcum, *A categorical approach to matrix Toda brackets*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 4625–4649.

[2] K. A. Hardie, H. J. Marcum and N. Oda, *Bracket operations in the homotopy theory of a 2-category*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, **33** (2001), 19–70.

[3] K. A. Hardie, K. H. Kamps, H. J. Marcum and N. Oda, *Triple brackets and lax morphism categories*, Applied Categorical Structures, **12** (2004), 3–27.

[4] H. J. Marcum and N. Oda, *Composition properties of box brackets*, J. Math. Soc. Japan **61** (2009), 507–549.

[5] H. Toda, *Generalized Whitehead products and homotopy groups of spheres*, J. Inst. Poly. Osaka City Univ. **3**, Series A, (1952), 43–82.

[6] H. Toda, **Composition Methods in Homotopy Groups of Spheres**, Princeton Universtiy Press, Princeton, 1962.