巡回 Gorenstein 商特異点の三角圏

大阪大学大学院理学研究科　植田　一石

A を可換とは限らない次数付き Noether 環とし、gr–A を有限生成次数付き A 加群のなす Abel 圏、$D^b(\mathrm{gr}\text{–}A)$ をその有界導来圏とする．$D^b(\mathrm{gr}\text{–}A)$ の対象は、射影加群の有界複体と擬同型の時 **perfect complex** と呼ばれる．Perfect complex のなす $D^b(\mathrm{gr}\text{–}A)$ の充満部分圏 $D^b(\mathrm{grproj}\text{–}A)$ は $D^b(\mathrm{gr}\text{–}A)$ の三角部分圏になるので、商圏

$$D^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{Sg}}(A) = D^b(\mathrm{gr}\text{–}A)/D^b(\mathrm{grproj}\text{–}A)$$

が三角圏として定まる．これを**特異点の三角圏 (triangulated category of singularities** と呼び、A の射影次元が有限の時には自明になることが定義から直ちに分かる．

一方、有限生成次数付きねじれ A 加群の圏 tor–A は gr–A の Serre 部分圏になるので、商圏

$$\mathrm{qgr}\, A = \mathrm{gr}\text{–}A/\mathrm{tor}\text{–}A$$

が Abel 圏として定まり、その導来圏は

$$D^b(\mathrm{qgr}\, A) = D^b(\mathrm{gr}\text{–}A)/D^b(\mathrm{tor}\text{–}A)$$

で与えられる．A が偏曲射影多様体 $(X, \mathcal{O}_X(1))$ の斉次座標環

$$A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Gamma(\mathcal{O}_X(i))$$

の時には、Serre の定理により Abel 圏の同値

$$\mathrm{qgr}\, A = \mathrm{coh}\, X$$

が存在する．ここで、$\mathrm{coh}\, X$ は X 上の連接層のなす Abel 圏である．

三角圏 $\mathcal{T}$ の半直交分解 (semiorthogonal decomposition) とは、$\mathcal{T}$ の三角部分圏の組 $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ で適当な条件を満たすものを指し、$\mathcal{T}$ の局所化と密接に関係しているほか、$\mathcal{T}$ が代数多様体の連接層の導来圏の場合には、代数多様体の極小モデル理論とも関連すると期待されている [BO, BO01, Bri02]．Orlov は $D^b(\mathrm{gr}\text{–}A)$ の半直交分解を巧みに用いることにより、A が AS-Gorenstein 環 (すなわち、$\boldsymbol{k} = A_0$ が体かつ A の入射次元 n が有限で、ある整数 a が存在して $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{k}, A) = \boldsymbol{k}(a)[-n]$) の場合に $D^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{Sg}}(A)$ と $D^b(\mathrm{qgr}\, A)$ の関係を明らかにした [Orl05].

さて、$(a_1, \ldots, a_n)$ を $\gcd(a_1, \ldots, a_n) = 1$ となるような正の整数の列とし、$R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ を n 変数多項式環に $\deg x_i = a_i$, $i = 1, \ldots, n$ なる次数を入れたものとする．ここで $N = a_1 + \cdots + a_n$ とおいて、

$$A_k = R_{kN} \tag{1}$$

によって新たな次数付き環 $A(a_1, \ldots, a_n) = \bigoplus_{k \geq 0} A_k$ を定めると、A は重み付き射影空間 $\mathbb{P}(a_1, \ldots, a_n)$ の斉次座標環となる．また、次数付けを忘れると A は巡回 Gorenstein 商特異点を定める；$\mathbb{C}^n/G = \operatorname{Spec} A(a_1, \ldots, a_n)$. ただし、$G$ は $\zeta = \exp[2\pi\sqrt{-1}/(a_1 + \cdots + a_n)]$ に対し $g = \operatorname{diag}(\zeta^{a_1}, \cdots, \zeta^{a_n})$ で生成される $SL_n(\mathbb{C})$ の巡回部分群である．

一般に $GL_n(\mathbb{C})$ の有限部分群 G に対して、既約表現を頂点とし、定義表現のテンソル積の既約分解の重複度によって矢印の本数を定めることによって G の McKay 箙と呼ばれる箙が定義される．また、McKay 箙には自然に関係 (道代数の両側イデアル) が定義され、その表現の圏は $\mathbb{C}^n$ 上の G 同変な連接層の圏と同値になる．G が上で与えられた巡回部分群の時、その McKay 箙は N 個の頂点 $\{\rho_k\}_{k=0}^{N-1}$ と nN 本の矢印 $\{x_{i,k}\}_{\substack{i = 1, \ldots, n \\ k = 0, \ldots, N-1}}$ からなる箙に

$$x_{j,k+a_i} x_{i,k} - x_{i,k+a_j} x_{j,k}, \qquad 1 \leq i < j \leq n, \; k = 1, \ldots, N - a_i - a_j - 1$$

で生成される関係を入れたものになる．

講演では、Beilinson の定理と Orlov の定理を用いることによって、(1) で与えられた次数付き環の特異点の三角圏が、G の McKay 箙から頂点を一つ取り除いて得られる関係付き箙の表現の導来圏と三角圏として同値になることを紹介したい [Ued08]．また、これは [Tak05] の結果を $n = 2$ の場合として含んでいる．

References

[BO] A. Bondal and D. Orlov. Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties. arXiv:alg-geom/9506012.

[BO01] Alexei Bondal and Dmitri Orlov. Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences. *Compositio Math.*, 125(3):327–344, 2001.

[Bri02] Tom Bridgeland. Flops and derived categories. *Invent. Math.*, 147(3):613–632, 2002.

[Orl05] D. O. Orlov. Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities. math.AG/0503632, 2005.

[Tak05] Atsushi Takahashi. Matrix factorizations and representations of quivers I. math.AG/0506347, 2005.

[Ued08] Kazushi Ueda. Triangulated categories of Gorenstein cyclic quotient singularities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(8):2745–2747, 2008.