

# ON STABLE DIMENSION OF SELF-INJECTIVE ALGEBRAS

吉脇 理雄  
大阪市立大学

半単純でない自己入射多元環  $A$  の安定次元  $\text{stab. dim } A$  とは  $A$  の安定圏の三角圏としての次元のことであり、特に導来同値不変量である (Rickard [5] の結果による)。

三角圏の次元は Rouquier [7] によって定義された概念であるが、大域次元と同じくこれも幾何学的な次元を圏論的に定式化しようと試みるものである。特に (自己入射) 多元環の安定次元や導来次元 (導来圏の三角圏としての次元) は大域次元や表現次元と強い関係がある [6]。表現次元は Auslander によって実験的に提唱された [1]。それは有限表現性などの多元環の表現論的な性質を大域次元などのホモロジー代数的な量で制御しよう、という考えに基づいたものであった。したがって、安定次元や導来次元は表現論的に興味深く、特に安定次元によって自己入射多元環の表現論的な性質を制御できないか、と考えたのである。

定義より直ちに自己入射多元環  $A$  が有限表現型ならば、 $\text{stab. dim } A = 0$  である。ではその逆に  $\text{stab. dim } A = 0$  ならば、 $A$  は有限表現型であろうか、という問題が自然に生まれるが、我々はそれを肯定的に解決した [8]。これは三角圏が定義されて以来成り立つであろうと期待されてきたが、これまで証明されていなかったものである。なお、証明には Brauer-Thrall 予想やそれを使った Liu の有限表現型多元環の特徴づけ [4] が用いられる。

その応用として Chen-Ye-Zhang の結果 [3] を改良することで導来次元が零の多元環と安定次元が零の自己入射多元環には密接な関係があることも示した [9]。

次に考えるべきは tame 表現型である。自己入射多元環  $A$  が tame 表現型であれば、 $\text{stab. dim } A \leq 1$  である、という予想がある。一般に逆は成り立たない。これは表現次元の予想と関係がある予想である。よって、いくつかの肯定的な結果はすでに存在するが、被覆理論より、tame 表現型の標準的自己入射多元環の一部のクラスについてこの予想が成り立つことが新たにわかった [9]。

## REFERENCES

1. M. Auslander, *Representation dimension of Artin algebras*, Queen Mary College Mathematics Notes (1971), republished in [2].
2. M. Auslander, *Selected works of Maurice Auslander. Part 1*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, Edited and with a foreword by Idun Reiten, Sverre O. Smalø, and Øyvind Solberg.
3. X. W. Chen, Y. Ye and P. Zhang, *Algebras of derived dimension zero*, Comm. Algebra **36** (2008), no. 1, 1–10.
4. S. Liu, *Degrees of irreducible maps and the shapes of Auslander-Reiten quivers*, J. London Math. Soc. (2) **45** (1992), no. 1, 32–54.
5. J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure Appl. Algebra **61** (1989), no. 3, 303–317.
6. R. Rouquier, *Representation dimension of exterior algebras*, Invent. Math. **165** (2006), no. 2, 357–367.
7. R. Rouquier, *Dimensions of triangulated categories*, J. of K-theory **1** (2008), no. 2, 193–256 and errata, 257–258.
8. M. Yoshiwaki, *On selfinjective algebras of stable dimension zero*, Nagoya Mathematical Journal (accepted for publication).
9. M. Yoshiwaki, *On selfinjective algebras of stable dimension zero*, Proceedings of the 43rd Symposium on Ring Theory and Representation Theory (to appear).  
*E-mail address:* yosiwaki@sci.osaka-cu.ac.jp