カルタン行列からみた多元環の表現論
Representation theory of algebras through Cartan matrix

佐藤眞久（山梨大学）

序文

環論は、古くは移入加群の概念、近年ではホモロジーやホモトピーの概念など、位相幾何学と相互に概念を共有して発展をしてきている。この講義では、位相幾何学の専門家の方にも興味が持てるように、多元環の表現論の発展を、位相幾何学と関係がある題材を交えながら、カルタン行列とこれから構成されるコクセター行列の果たしてきた役割を通じて概観していきたい。

講義内容

ここでは、環としては、体上の有限次元である基本多元環を考える。基本多元環のカルタン行列は、組成剰余列から決まり、環の構造は消えてしまい、この行列から環の構造を読み取ることは一般にはできない。しかし、遺伝環のように、組成剰余列のみで構造が決まってしまう多元環があり、歴史上この多元環の分類が、大きな契機となって多元環論（の表現論）が発展してきた経緯がある。

一般の多元環では、与えられた多元環の「普遍被覆」を取ることで、局所有限次の遺伝多元環が現れ、遺伝環の理論で得られた結果をこの局所有限次の遺伝多元環に適用して、この性質から一般の多元環を調べることができる。

（局所有限次）遺伝環では構造が単純化されるが、普遍被覆に元の多元環の構造が仕舞われている図式になっている。これによって構造が復活してくるのである。このことを念頭に置けば、遺伝環を考察することの意味が理解して頂けるであろう。

遺伝環の変形理論（Tilting Theory) は、多元環の発展の中で重要な役割果たした。さらに近年では、Mutation と呼ばれる変形が脚光を浴びている。

古典理論から Mutation の理論まで、カルタン行列 $\mathbf{C}$ から決まるコクセター行列 $\mathbf{\Phi} = -\mathbf{C}^t\mathbf{C}$ の役割を見ることで、これらの理論の役割や意味していること、およびその目的を見ていきたい。

これらの解説を、次の順で各テーマ毎に、具体例をもとに話を進めていく。

1. 有向グラフによる多元環とカルタン行列

ここでは、定義に続いて、カルタン行列問題を取り上げ、ある種の多元環を代数多様体と見なして、ここに適当な位相が入れられるか、という問題提起をしていく。

2. 二次形式のカルタン行列
　二次形式のカルタン行列とディンキン図形等の関係を述べる。
3. 鏡映 (reflection)
　ベクトルの鏡映、有向グラフの鏡映、多元環の表現の鏡映の各々を定義し、これらの関係をのべ、ワイル変換を定義して、基本結果を復習する。
4. コクセター変換 (Coxeter transformation)
　多元環のコクセター行列、グラフ（二次形式）のコクセター行列を導入して、これらの基本的な関係を見る。
5. AR クイバアー (Auslander-Reiten quiver)
　直既約加群とその間の既約写像のなす有向グラフ（AR クイバアー) は、歴史上では最初に、遺伝環の場合にコクセター行列から構成された。普遍被覆上の直既約加群と元の直既約加群についても復習する。
6. 傾理論 (Tilting Theory)
　傾理論の原型は、APR-Tilting と呼ばれるワイル変換による変形であった。ここでは、正のルート系が直既約加群に対応していることが基本結果であった。しかし、負のルート系は、ここでは全く意味を持っていなかったが、実は、負のルート系は大きな意味を潜在していたのである。そこで、負のルート系の正体について解説をしていく。
7. Mutatioin とコクセター変換
　Mutation の定義と Mutatioin がコクセター変換の一般化でることを解説する。
8. Tilting から Mutation へ
　Tilting から Mutation へ考察の対象を移行する理由を具体例で考える。これにより、2-Calbi-Yau カテゴリ $\mathcal{C} = D^b(mod\text{-}R)/ < \Phi[1] >$ と mutation を考える必然性が理解できるであろう。
　結論から言えば、Tulting が加群のカテゴリー内での変形理論とすれば、Mutation は、Derived カテゴリー内での変形理論と言える。
9. コクセター行列の Periodicity について
　コクセター行列　Φ がある正の整数 m で、Φ^m が単位行列になることは、Calbi-Yau 性と関係して重要なことを説明した。そこで、どのような場合にこれが成立するかを説明する。

Φ-Orbit のグラフ